Uitwerkingen hoofdstuk 24 deel vwo B 1,2   6

Convergentie en limieten

1.

a. De vergelijking van de lijn door A en D is : $y = -0{,}6x + 40 \Rightarrow$ de r.c. is dus -0,6 $\Rightarrow$
$\frac{AC}{CD} = 0{,}6 \Rightarrow AC = 0{,}6.CD$

b. De r.c. van de lijn door D en B is 1 $\Rightarrow BE = DE$. Verder geldt $BE = AC \Rightarrow$
$DE = 0{,}6 \,.\, CD$

c. Zie de figuur in het boek. $DE = u_1 - d$ en $CD = d - u_0$ Uit onderdeel b volgt dan :
$u_1 - d = 0{,}6 \,.\, (d - u_0)$

d. Zie ook figuur 24.2. $\Rightarrow d - u_2 = HD = HG$ (want de r.c. = 1) $= EF$ Er geldt: $EF = 0{,}6 \,.\, DE$ (want de r.c. is -0,6) Er geldt dus $d - u_2 = 0{,}6 \,.\, DE = 0{,}6 \,.\, (u_1 - d)$

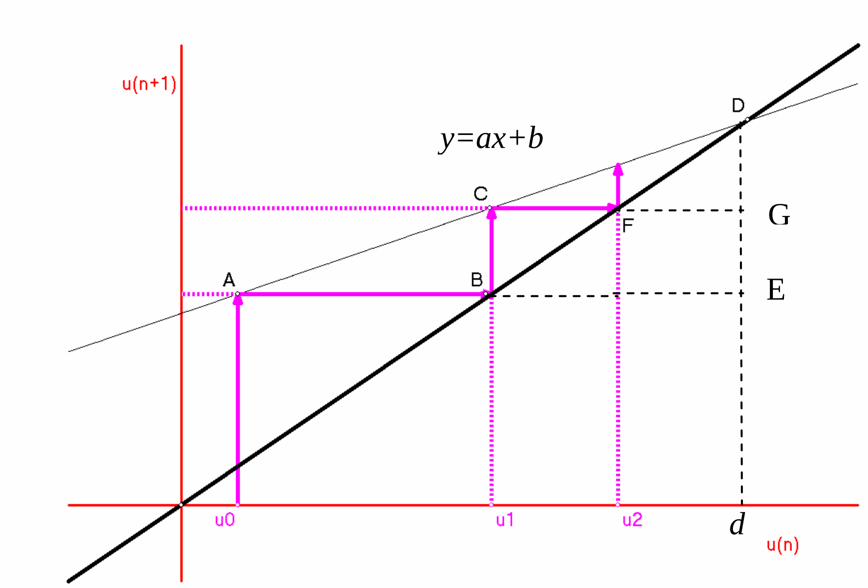
e. $$\left.\begin{aligned} d - u_2 &= 0{,}6.(u_1 - d) \\ u_1 - d &= 0{,}6.(d - u_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d - u_2 = 0{,}6.0{,}6.(d - u_0) = 0{,}6^2.(d - u_0)$$

f. Op dezelfde manier geldt: $u_3 - d = 0{,}6.(d - u_2) = 0{,}6.0{,}6^2.(d - u_0) = 0{,}6^3.(d - u_0)$

g. Als n is even geldt : $d - u_n = 0{,}6^n.(d - u_0)$; Als n is oneven geldt : $u_n - d = 0{,}6^n.(d - u_0)$
Voor grote waarden van n gaat $0{,}6^n$ naar 0 $\Rightarrow u_n - d$ en $d - u_n$ gaan dus ook naar 0 $\Rightarrow$
Voor grote n gaat u_n naar d en is dus begrensd.

2

a. $\frac{DE}{AE} = r.c. = a \Rightarrow$
$DE = a.\, AE$
$DE = BE(r.c. = 1) = d - u_1$
$AE = d - u_0$
$\Rightarrow d - u_1 = a \,.\, (d - u_0)$



b. Trek $CF \,//\, AE \Rightarrow G$

$\frac{DG}{CG} = rc = a$
$DG = a \,.\, CG$
$DG = d - u_2$
$CG = BE = d - u_1 \Rightarrow$
$d - u_2 = a(d - u_1)$
Uit onderdeel a weten we dat geldt: $d - u_1 = a \,.\, (d - u_0) \Rightarrow d - u_2 = a^2 .(d - u_0)$

c. Zo geldt ook : $d - u_3 = a(d - u_2) = a^3 .(d - u_0)$ en $d - u_4 = a(d - u_3) = a^4 .(d - u_0)$ $\Rightarrow$ in het algemeen geldt dus : $d - u_n = a^n .(d - u_0)$

d.

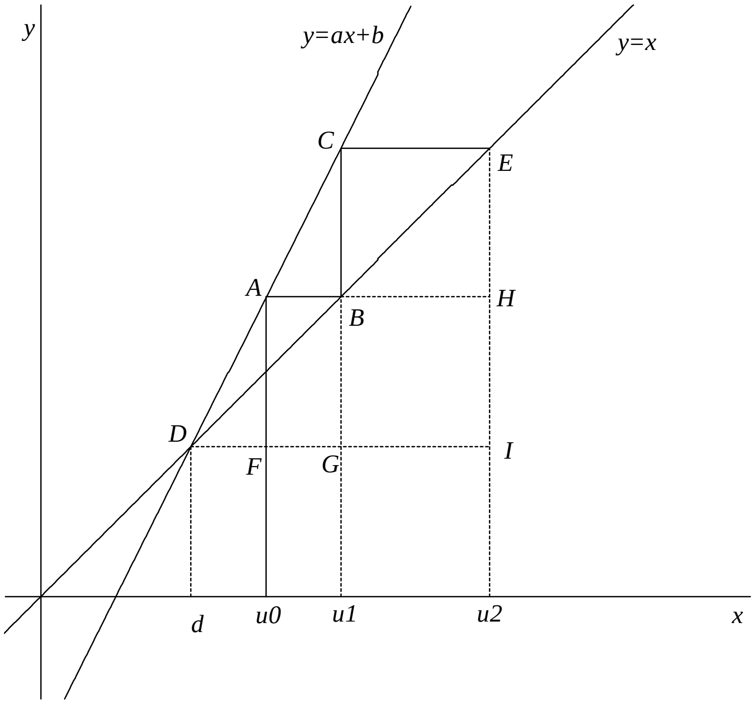
Trek *CE , BH en DI // AB*

$\frac{AF}{DF} = rc = a \;\Rightarrow AF = a \,.\, DF$

$u_1 - d = a.(u_0 - d)$ Zo geldt ook:

$u_2 - d = a.(u_1 - d) = a^2\,(u_0 - d)$ enz.

$\Rightarrow u_n - d = a^n.(\,u_0 - d)$



e. Bij figuur 24.3 geldt dat $|a| < 1 \Rightarrow a^n \to 0 \Rightarrow$ er is dus een grenswaarde.
Bij figuur 24.4 geldt dat $a > 1 \Rightarrow$ steeds een toename $\Rightarrow$ geen grenswaarde.

3a. $u_n = -1{,}12u_{n-1} + 159$ met $u_0 = 70 \Rightarrow |a| = |-1{,}12| > 1$ en $u_1 \neq u_0 \Rightarrow u_0$ is geen dekpunt $\Rightarrow$ het is dus een divergente rij dus ook geen grenspunt.

b. $u_n = -0{,}12u_{n-1} + 84$ met $u_0 = 70 \Rightarrow |a| = |-0{,}12| < 1 \Rightarrow$ het is een convergente rij. Voor het dekpunt x geldt : $x = -0{,}12x + 84 \Leftrightarrow 1{,}12x = 84 \Leftrightarrow x = 75 \Rightarrow$ de grenswaarde is dus 75.

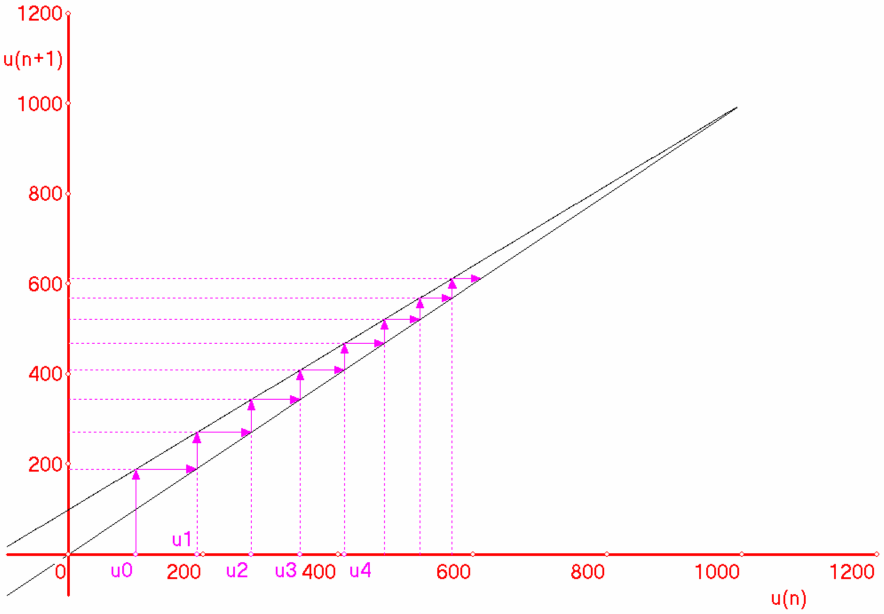
c. $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 10$ met $u_0 = 70 \Rightarrow |a| = |0{,}98| < 1 \Rightarrow$ het is een convergente rij. Voor het dekpunt geldt: $x = 0{,}98x + 10 \Leftrightarrow 0{,}02x = 10 \Leftrightarrow x = 500 \Leftrightarrow$ de grenswaarde is dus 500.

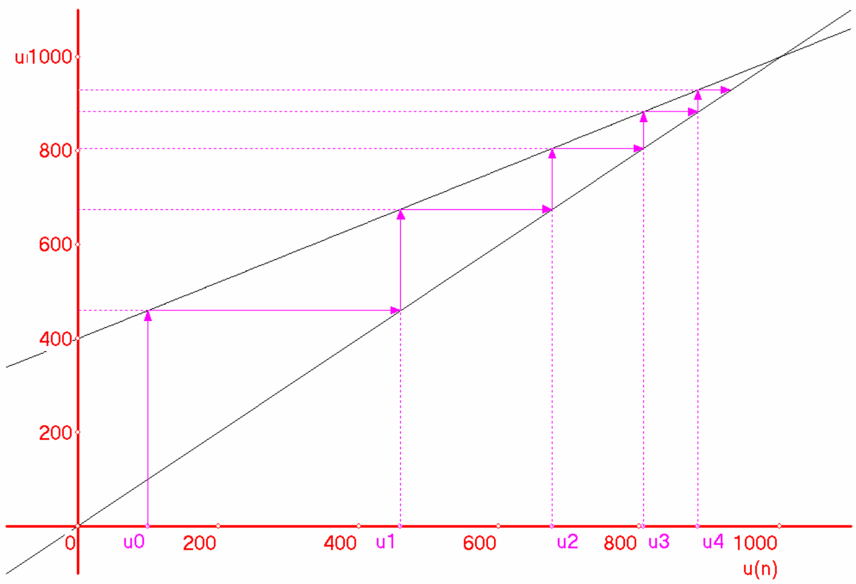
d. $u_{n+1} = 5u_n - 300$ met $|a| = |5| > 1$ en $u_1 \neq u_0 \Rightarrow u_0$ is geen dekpunt $\Rightarrow$ het is een divergente rij en er is dus ook geen grenspunt.

4.

a. $u_n = 0{,}9u_{n-1} + 100$ met $u_0 = 100$ Dekpunt $\Rightarrow x = 0{,}9x + 100 \Leftrightarrow 0{,}1x = 100 \Leftrightarrow x = 1000$
$\Rightarrow$ het dekpunt is 1000
$v_n = 0{,}6n_{n-1} + 400$ met $v_0 = 100$ Dekpunt $\Rightarrow x = 0{,}6x + 400 \Leftrightarrow 0{,}4x = 400 \Leftrightarrow x = 1000$
$\Rightarrow$ het dekpunt is 1000

b.





c. Bij v_n zie je
dat de webgrafiek met veel grotere sprongen naar het dekpunt gaat dan bij u_n.

d. $|0{,}9| > |0{,}6| \Rightarrow$ de stappen bij v_n zijn dus groter.

5. $u_n = 2.u_{n-1} - 8$ met $u_0 = 10$

a. De rij is van het type : $u_n = au_{n-1} + b$ $a = 2 > 1$ en $u_1 = 2 \,.\, 10 - 8 = 12$ ongelijk aan 10
$\Rightarrow u_0 = 10$ is dus geen dekpunt. Uit dit alles volgt dat de gegeven rij u_n divergent is.
We krijgen de termen : 10 ; 12 ; 16 ; 24 ; 40 ; ….. $\Rightarrow u_1 = 12$; $u_2 = 16$ en $u_3 = 24$

b. $v_n = a \, . \, v_{n-1} + b$ met $v_0 = 10$. De rijen u_n en v_n hebben hetzelfde dekpunt d en de rij u_n gaat twee keer zo snel $\Rightarrow |v_2 - d| = a^2.|v_0 - d|$ u_n gaat twee keer zo snel $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |u_1 - d| = a^2.|u_0 - d| \\ u_n = 2u_{n-1} - 8 \Rightarrow |u_1 - d| = 2.|u_0 - d| \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2} \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$$

c. 1) Als $a = \sqrt{2}$ Het dekpunt van u_n vinden we uit $2x - 8 = x$ $\Rightarrow$ het dekpunt is dus $x = 8$
Nu moet dus ook de rij v_n als dekpunt 8 hebben $\Rightarrow \sqrt{2} \, . \, 8 + b = 8 \Leftrightarrow b = 8 - 8\sqrt{2}$

```
Plot1  Plot2  Plot3
 nMin=0
·.u(n)=■u(n-1)+8
 u(nMin)={10}
·.v(n)=√(2)v(n-1)
+8-8√(2)
 v(nMin)={10}
·.w(n)=w(n-1)*0.1
```

n	u(n)	v(n)
0	10	10
1	28	10.828
2	64	12
3	136	13.657
4	280	16
5	568	19.314
6	1144	24

n=0

Je kunt nu aan de GR zien dat het klopt.

2) Als $a = -\sqrt{2}$ De rijen u_n en v_n hebben hetzelfde dekpunt 8 $\Rightarrow 8 = -\sqrt{2}.8 + b \Rightarrow$
$b = 8 + 8.\sqrt{2}$
Nu weer controleren met GR $\Rightarrow$

```
Plot1  Plot2  Plot3
 nMin=0
·.u(n)=2u(n-1)+8
 u(nMin)={10}
·.v(n)= -√(2)v(n-1
)+8+8√(2)
 v(nMin)={10}
·.w(n)=w(n-1)*0.1
```

n	u(n)	v(n)
0	10	10
1	28	5.1716
2	64	12
3	136	2.3431
4	280	16
5	568	-3.314
6	1144	24

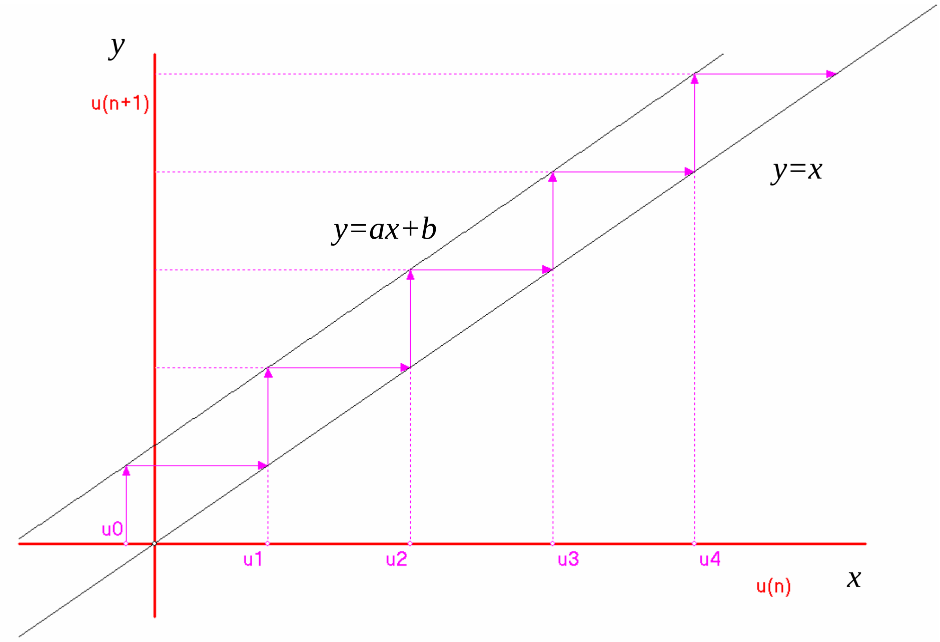
n=0

Zo te zien klopt het.

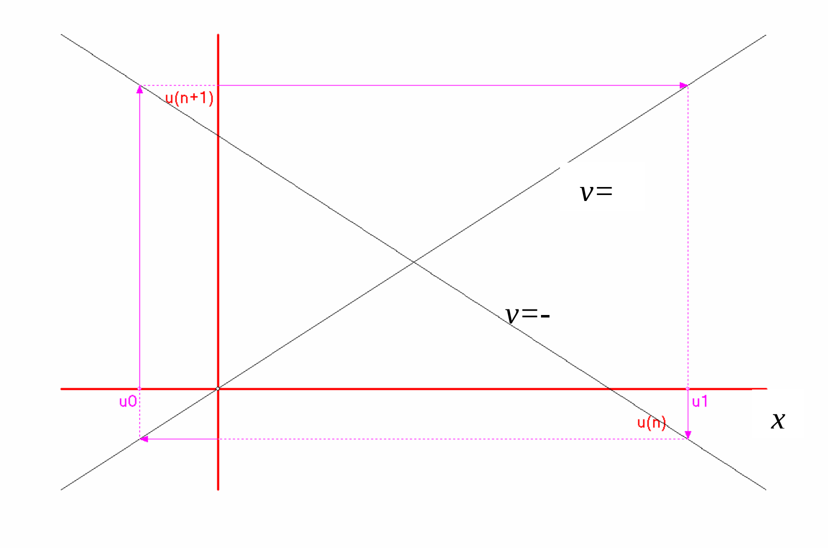
6. $u_n = a.u_{n-1} + b$

a. $a = 1$ en $b \neq 0$

Uit de tekening blijkt dat er geen convergentie is.

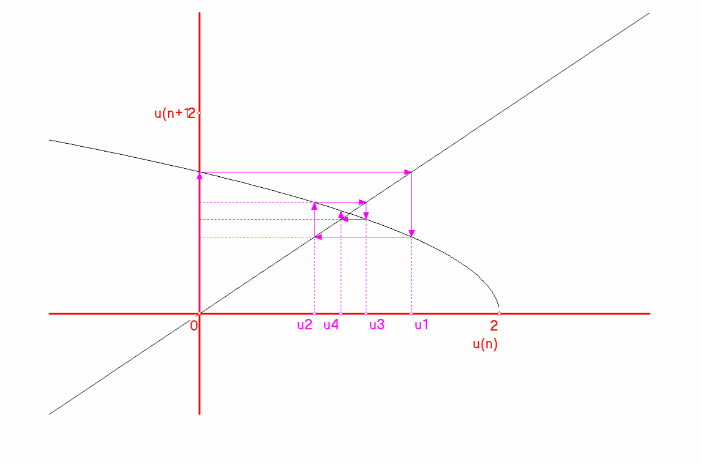


b. Nu zie je in de figuur heel duidelijk dat je steeds weer terugkomt in hetzelfde punt $\Rightarrow$ er is dus geen convergentie.



7. $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ met $u_0 = 0$

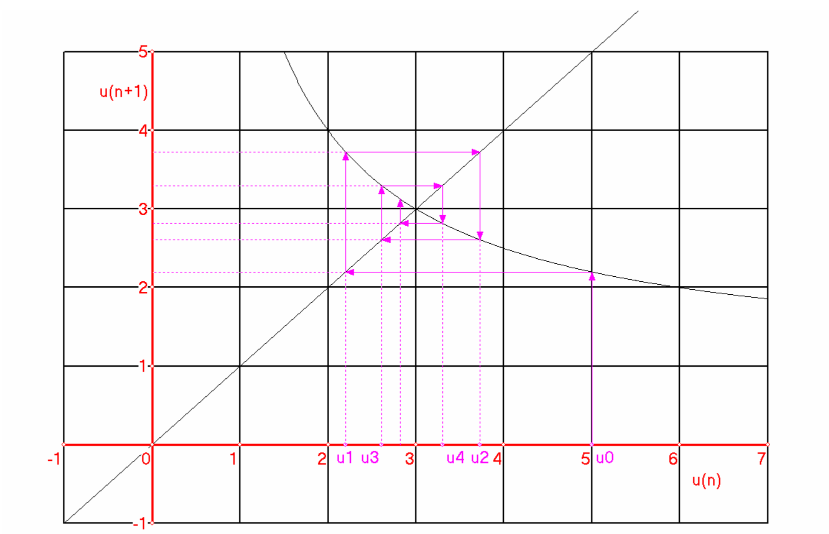
a. Dekpunt berekenen:
$x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x^2 = 2 - x \Leftrightarrow$
$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = -2 \vee x = 1$
$\Rightarrow$ de rij convergeert zoals je kunt zien naar het dekpunt 1 $\Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$



b. $|u_n - 1| < 10^{-4} \Leftrightarrow -10^{-4} < u_n - 1 < 10^{-4} \Leftrightarrow 0,9999 < u_n < 1,0001$
Voer u_n in je GR in ,dan zie je dat
$u_{13} \approx 1,00011 > 1,0001$; $u_{14} \approx 0,9994 > 0,99999$ en $u_{15} \approx 1,00003 < 1,0001$ $\Rightarrow$
vanaf $n = 14$ geldt dus $|u_n - 1| < 10^{-4}$

8. $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n} + 1$ met $u_0 = 5$

a. Bekijk de webgrafiek dan zie je dat er convergentie is naar waarschijnlijk 3. Berekening:



Los op : $\frac{6}{x}+1=x \iff$

$x^2=6+x \iff x^2-x-6=0 \iff$

$(x-3)(x+2)=0 \iff$

$x=3 \vee x=-2$

De rij convergeert dus naar 3 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

b. $|u_n-3|<10^{-3} \iff$

$-10^{-3}<u_n-3<10^{-3} \iff$

$2{,}999<u_n<3{,}001$

Nu u_n invoeren en bekijk de tabel
$\Rightarrow$ daar zien we dat vanaf n = 18
voldaan is aan de gestelde voorwaarde.

n	u(n)
14	3.0049
15	2.9967
16	3.0022
17	2.9986
18	3.001
19	2.9994
20	3.0004

n=20

9. $u_n=\frac{12}{2u_{n-1}-5}$ met $u_0 = a$

a. $a = 1$ In de webgrafiek zien we duidelijk convergentie.
Nu berekening van dekpunt $\Rightarrow$

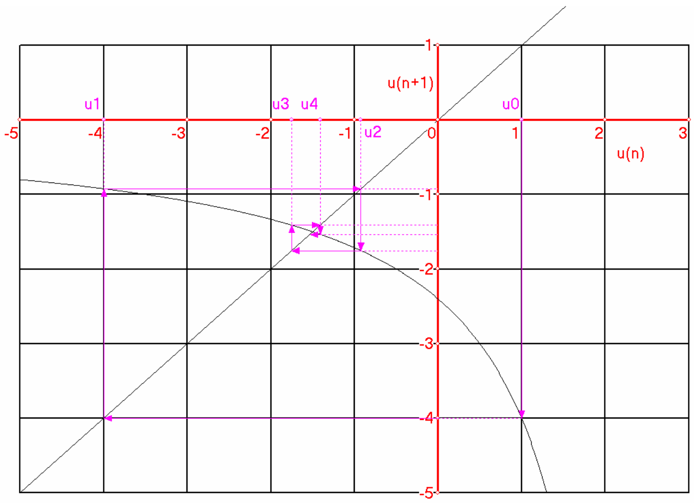
$\frac{12}{2x-5}=x \iff 2x^2-5x=12 \iff$

$2x^2-5x-12=0$

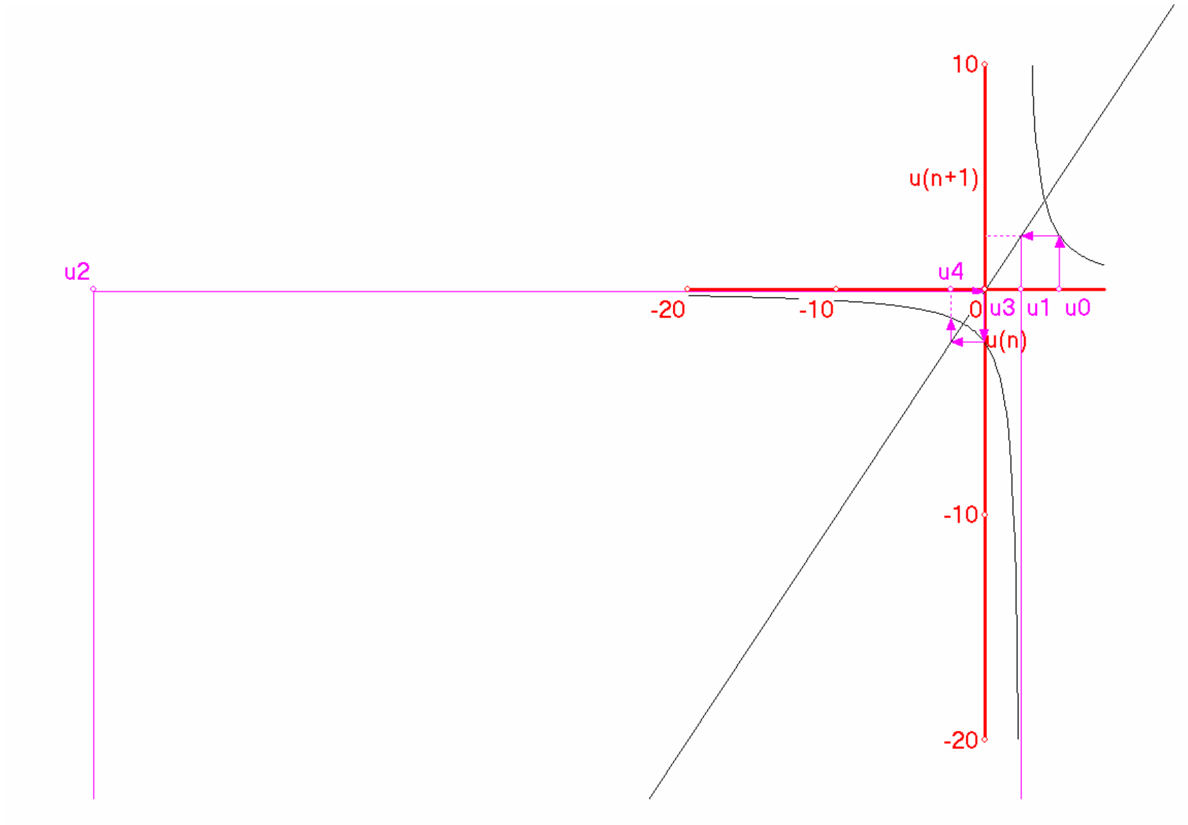
D = 121 $\Rightarrow$

$x=\frac{5+11}{4} \vee x=\frac{5-11}{4} \Rightarrow$

x = 4 ∨ x = -1,5 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1{,}5$



b. Nu $u_n = a = 5$



Ook hier zien we weer convergentie.

Berekening: $\frac{12}{2x-5} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$ D = 121 $\Rightarrow x = \frac{5+11}{4} \vee x = \frac{5-11}{4}$

$\Rightarrow$ x = 4 $\vee$ x = -1,5 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -1{,}5$ $\Rightarrow$ de berekening blijft hetzelfde als bij onderdeel a.

c. Uit de berekeningen zie je dat de rij constant blijft bij a = -1,5 $\vee$ a = 4

d. Nu $a = u_0 = 4{,}9 \Rightarrow u_1 = \frac{12}{2.4{,}9-5} = 2{,}5 \Rightarrow u_2 = \frac{12}{2.2{,}5-5} = \frac{12}{0}$ en dit kan niet $\Rightarrow$ alleen de termen u_0 en u_1 zijn gedefinieerd.

e. De eerste 4 termen zijn gedefinieerd $\Rightarrow u_4 = \frac{12}{0}$ $\Rightarrow$ voor u_3 geldt dus $2.u_3 = 5 \Leftrightarrow u_3 = 2{,}5 \Rightarrow$

$$2{,}5 = \frac{12}{2.u_2 - 5} \Leftrightarrow 2u_2 - 5 = \frac{12}{2{,}5} = 4{,}8 \Leftrightarrow 2u_2 = 9{,}8 \Leftrightarrow u_2 = 4{,}9 \Rightarrow$$

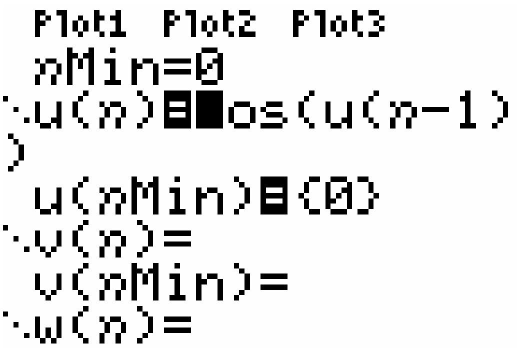
$$4{,}9 = \frac{12}{2.u_1 - 5} \Leftrightarrow 2u_1 - 5 = \frac{12}{4{,}9} = \frac{120}{49} \Leftrightarrow 2u_1 = \frac{365}{49} \Leftrightarrow u_1 = \frac{365}{98} \Rightarrow$$

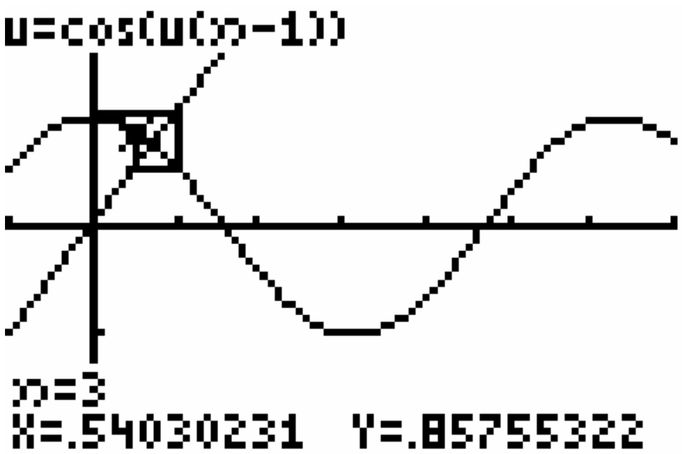
$$\frac{365}{98} = \frac{12}{2.u_0 - 5} \Leftrightarrow (2u_0 - 5).365 = 12.98 \Leftrightarrow 2u_0 - 5 = \frac{1176}{365} \Leftrightarrow 2u_0 = \frac{1176}{365} + 5 \Leftrightarrow$$

$$u_0 = \frac{588}{365} + 2{,}5 = \frac{3001}{730}$$ $\Rightarrow$ Bij $a = u_0 = \frac{3001}{730}$

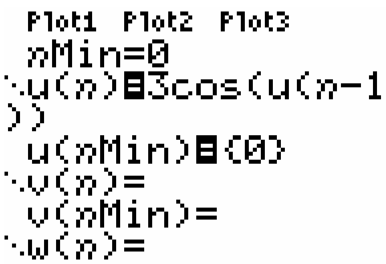
10. $u_n = a.\cos(u_{n-1})$ met $u_0 = 0$

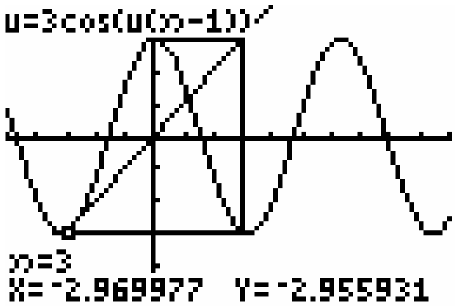
a. $a = 1 \Rightarrow u_n = \cos(u_{n-1})$ Voer de rij in zoals in de linkse figuur te zien is. Duidelijk zie je in de rechtse figuur dat de rij niet monotoon is. In de webfiguur rechts zie je dat er wel convergentie is. De limiet vinden we door de oplossing van cos x = x. Met intersect vinden we x ≈ 0,7391 $\Rightarrow$ de limiet is dus 0,7391





b. $a = 3 \Rightarrow u_n = 3.\cos(u_{n-1})$ met $u_0 = 0$

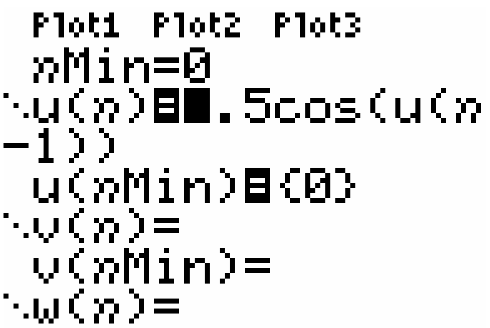


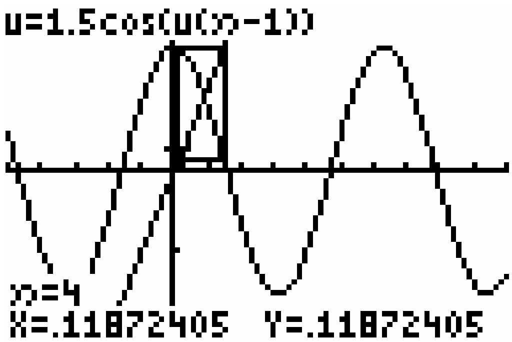


Je ziet ook hier dat het geen monotone rij is. Uit de webgrafiek blijkt dat de rij wel convergeert naar het linkse snijpunt van $3.\cos(x) = x$ Via de optie intersect vinden we

$x \approx -2{,}9381 \Rightarrow$ De limiet is dan ook -2,9381

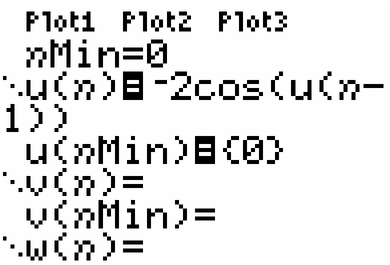
c. Als $a = 1{,}5$ dan $u_n = 1{,}5.\cos(u_{n-1})$ met $u_0 = 0$

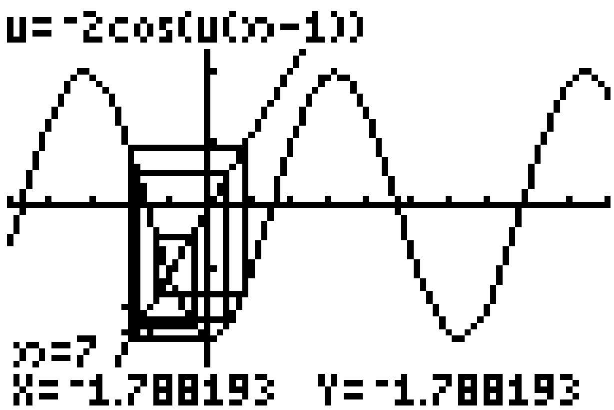




Ook nu is het geen monotone rij. Aan de webgrafiek zie je dat de rij niet convergeert. De webgrafiek blijft rondgaan in de geplotte rechthoek naar 2 punten.

d. Als $a = -2$ dan $u_n = -2.\cos(u_{n-1})$ met $u_0 = 0$

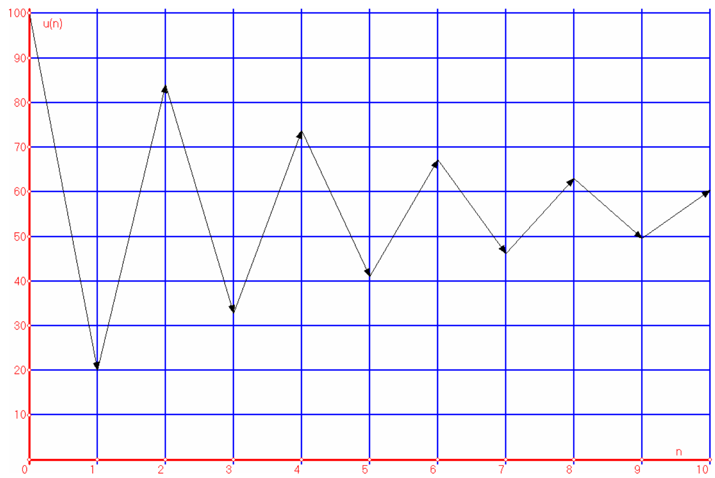




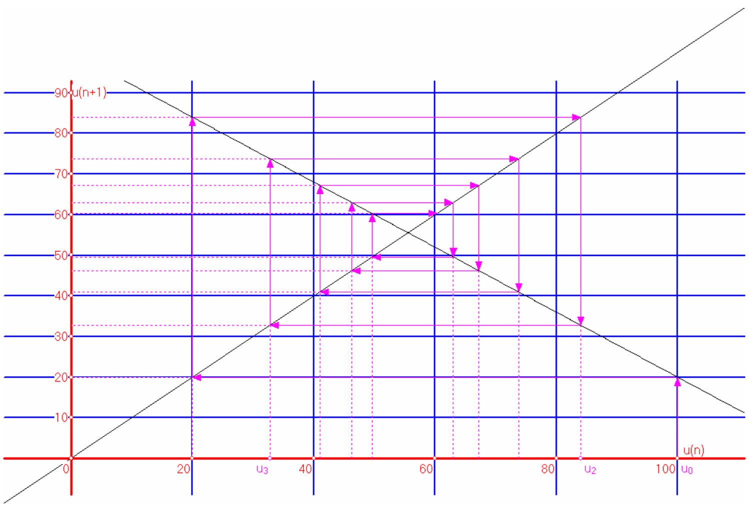
De webgrafiek draait op een vreemde manier rond het snijpunt van de lijn $y = x$ en

$y = -2.\cos(x)$. De rij is dus niet monotoon en ook niet convergent.

11a.



b.



c. De grenswaarde krijgen we door het oplossen van de vergelijking:

$$x = -0{,}8x + 100 \Leftrightarrow 1{,}8x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{100}{1{,}8} \Leftrightarrow x = 55\tfrac{5}{9} \;\; \Rightarrow \text{de grenswaarde is dus: } 55\tfrac{5}{9}$$

12a. Voer verschillende waarden voor *c* in . Steeds geeft de rij een grenswaarde van 0,5.
Alleen bij *c* = - 0,5 krijgen we alleen de waarde u_0 = -0,5 en verder bestaan er geen termen

van deze rij. Bij *c* = -1 krijgen we de constante rij : -1 , -1 , -1 , -1 , …. $\Rightarrow$ alleen voor c = -1

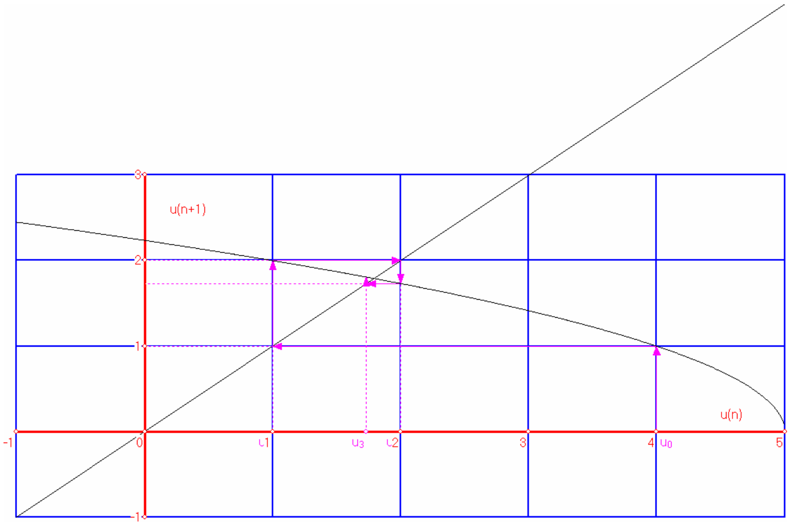
zijn alle termen negatief.

b. Uit onderdeel a blijkt dus ook dat de rij voor alle waarden van *c* niet gelijk aan -0,5 convergent is.

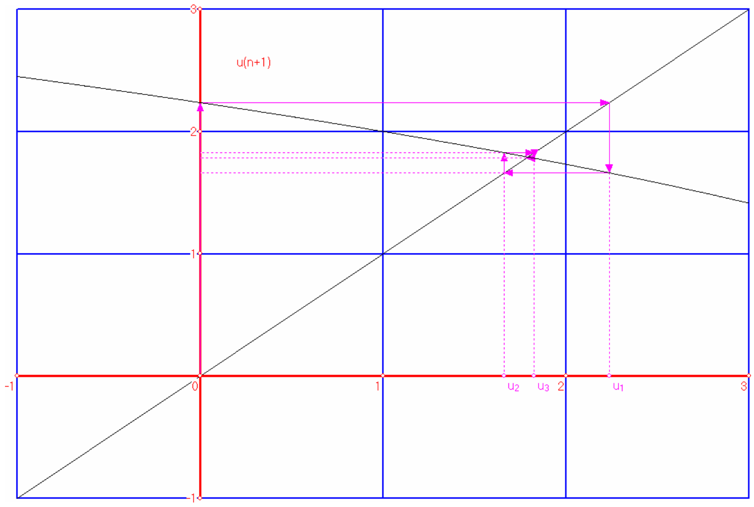
13 $u_n = \sqrt{5 - u_{n-1}}$ met $u_0 = c$ en $c \le 5$

a.

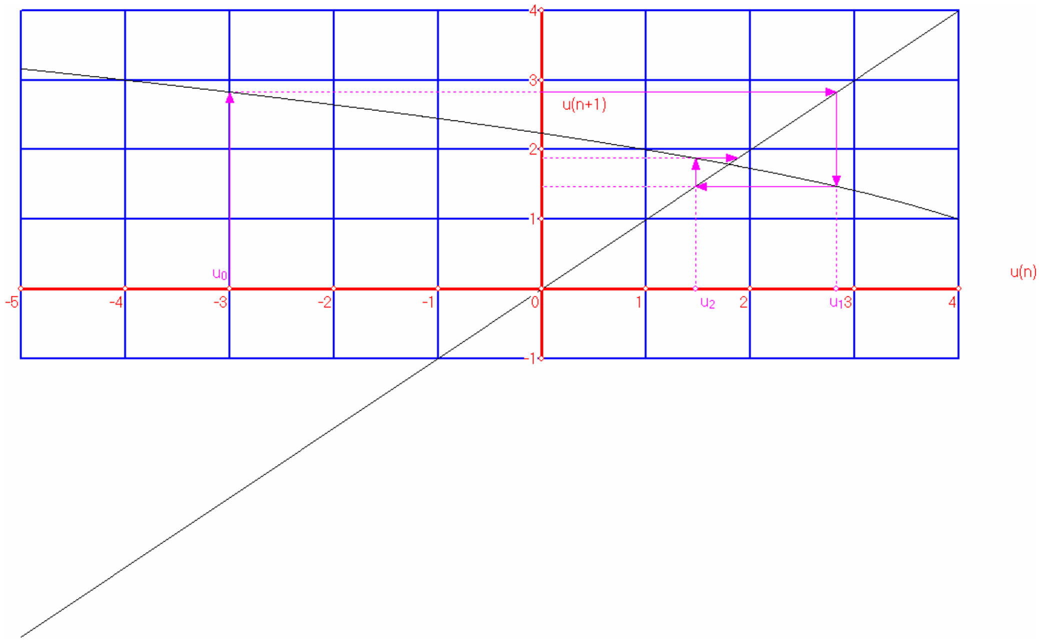
c = 4



c = 0



c = -3

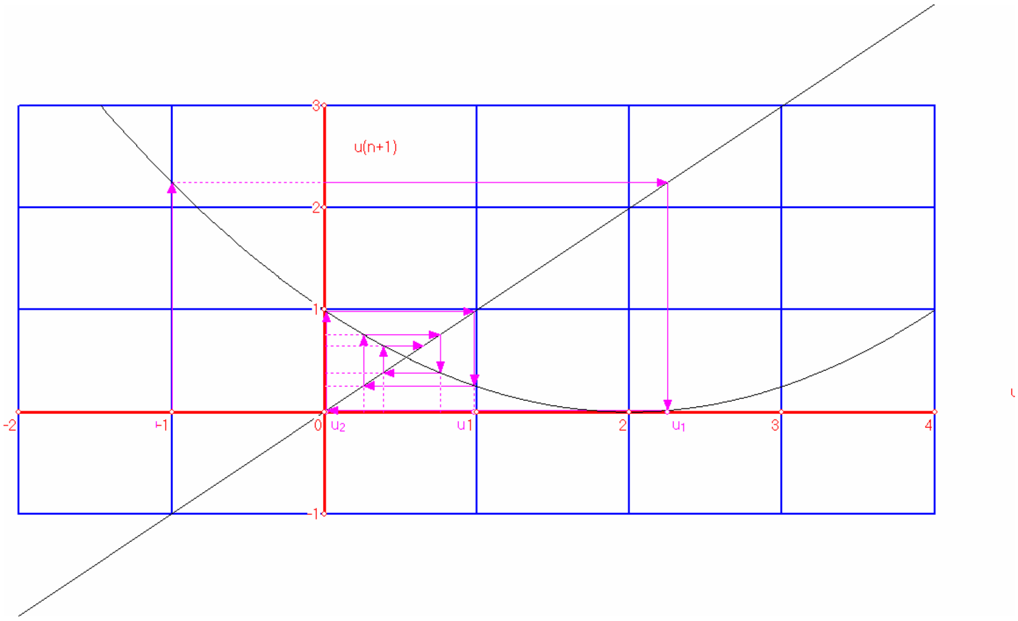


b. Als u_2 niet bestaat dan moet gelden dat $5 - u_1 < 0 \Rightarrow u_1 > 5 \Rightarrow$ er moet dus gelden : $\sqrt{5-u_0} > 5 \Leftrightarrow 5-u_0 > 25 \Leftrightarrow u_0 < -20 \Rightarrow$ voor alle waarden van *c* met *c* < -20 geldt dat u_1 wel bestaat , maar u_2 bestaat niet.

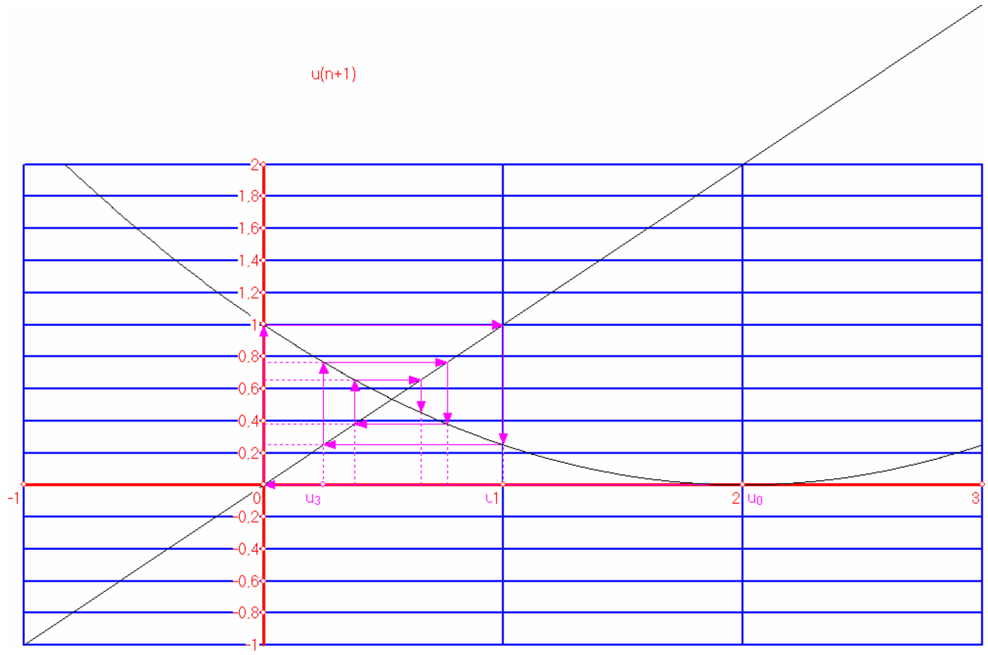
c. Als u_3 niet bestaat dan geldt dat $5 - u_2 < 0 \Leftrightarrow u_2 > 5 \Leftrightarrow \sqrt{5-u_1} > 5 \Leftrightarrow 5 - u_1 > 25 \Leftrightarrow$ $u_1 <$ -20 Dan zou dus ook moeten gelden : $\sqrt{5-u_0} < -20$ en dit kan natuurlijk niet.
$\Rightarrow$ er zijn dus geen waarden van c zodat u_2 wel bestaat en u_3 niet bestaat.

14a.

c = -1



c = 2



Zo te zien ontstaat er voor de waarden van c met $-3 \leq c \leq 7$ een convergente rij.

b. We gaan eerst op zoek de dekpunten $\Rightarrow 0{,}25x^2 - x + 1 = x \Rightarrow$
$0{,}25x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$ D = 48 $\Rightarrow$

De dekpunten bij $x = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3} \vee x = 4 + 2\sqrt{3}$

Aangezien de parabool een as van symmetrie heeft bij $x = 2$ geldt dus dat je gelijke y-waarden krijgt bij $x = 4 + 2\sqrt{3} = 2 + 2 + 2\sqrt{3}$ en dus ook bij $x = 2 - 2 - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$
divergentie bij $c > 4 + 2\sqrt{3}$ en bij $c < -2\sqrt{3}$
convergentie hebben we bij : $-2\sqrt{3} < c < 4 + 2\sqrt{3}$

Als $c = -2\sqrt{3}$ dan krijgen we de rij : $-2\sqrt{3}$, $4 + 2\sqrt{3}$, $4 + 2\sqrt{3}$, $4 + 2\sqrt{3}$,…. $\Rightarrow$ constant.

Als $c = 4 + 2\sqrt{3}$ dan krijgen we de constante rij : $4 + 2\sqrt{3}$, $4 + 2\sqrt{3}$, $4 + 2\sqrt{3}$,….

$\Rightarrow$ **divergentie bij $c > 4 + 2\sqrt{3}$ en bij $c < -2\sqrt{3}$**

c. Uit onderdeel b blijkt dat er convergentie is voor : $-2\sqrt{3} \leq c \leq 4 + 2\sqrt{3}$

d. Voor waarden van c tussen $-2\sqrt{3}$ en $4 + 2\sqrt{3}$ is er sprake van convergentie . Uit de webgrafiek blijkt dat de termen wisselend groter en kleiner dan het dekpunt zijn. Er is dus hier geen sprake van een monotone rij. Bij de grenzen is er sprake van constante rijen.

Uit onderdeel b blijkt verder dat de rij monotoon is voor $c < -2\sqrt{3}$ en voor $c > 4 + 2\sqrt{3}$

e. Vanaf $u_n = 4 - 2\sqrt{3}$ is de rij constant. Dit moet gelden voor $n = 2 \Rightarrow u_2 = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow u_1 = 2\sqrt{3}$
$\Rightarrow 0,25\left(u_{n-1}\right)^2 - u_{n-1} + 1 = 2\sqrt{3}$ Neem $u_0 = c \Rightarrow 0,25c^2 - c + 1 - 2\sqrt{3} = 0$ alles maal 4 $\Rightarrow$
$c^2 - 4c + 4 - 8\sqrt{3} = 0 \Rightarrow D = (-4)^2 - 4 . 1 . (4 - 8\sqrt{3}) = 16 - 16 + 32\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \Rightarrow$

$$c = \frac{4+\sqrt{32\sqrt{3}}}{2} = \frac{4+4\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = 2+2\sqrt{2\sqrt{3}} \vee c = \frac{4-\sqrt{32\sqrt{3}}}{2} = \frac{4-4\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = 2-2\sqrt{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

Voor deze gevonden waarden van c is dus de rij vanaf $n = 2$ constant.

15.a. De rij $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 10n + 1}$ is een nulrij omdat de waarde van $n^2 - 10n + 1$ gaat naar oneindig als n naar oneindig gaat. (Dit is duidelijk omdat de grafiek van $f(x) = x^2 - 10x + 1$ een dalparabool is.)

b. De rij $v_n = \dfrac{1}{2+\sin(n)}$ is geen nulrij want de noemer neemt slechts waarden aan tussen 1 en 3 aangezien een sinus altijd tussen -1 en 1 ligt.

16.. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ met $n = 1 , 2 , 3 , \ldots.$

a. De rij $v_n = \dfrac{1}{n}$ is een nulrij $\Rightarrow u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ gaat dus naar 3 voor n naar oneindig $\Rightarrow u_n - c$ gaat naar 0 voor $c = 3$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3$

17. In dat geval krijg je een situatie van 0/0 en dan kan het nog alle kanten op.

18.

a. $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{5-0}{2+0} = 2,5$$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{1+0}=3$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{4+0+0}{1+0}=4$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)^2}{(2n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n^2+2n+1)}{(2n+1)(4n^2+4n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+n}{8n^3+12n^2+6n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{8+\dfrac{12}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}=$

$\dfrac{1+0+0}{8+0+0+0}=\dfrac{1}{8}$ Nu een andere manier :

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)^2}{(2n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^3}=\dfrac{1.(1+0)^2}{(2+0)^3}=\dfrac{1}{8}$ Beduidend eenvoudiger !!!

19.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^2=(3+0)^2=9$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{500n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{500}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10.2^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(10.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)=10.0=0$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5.2,6^n}{6.2,7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}.\left(\dfrac{2,6}{2,7}\right)^n\right)=\dfrac{5}{6}.0=0$

20.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+......+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}.n.(1+n)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}.1.\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}{1}=\dfrac{\dfrac{1}{2}.(0+1)}{1}=\dfrac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+5+8+11+....+(3n+2)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}.(n+1).(2+3n+2)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{4}{n}+3\right)}{1}=$

$=\dfrac{\frac{1}{2}.(1+0)(0+3)}{1}=\dfrac{3}{2}$

21. $u_n=\ln\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$ met n = 1 , 2, 3, …

a. Voor grote waarden van n is $\dfrac{1}{n^2}\approx 0 \;\Rightarrow\; \ln\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)\approx \ln(2+0) = \ln 2$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln(2+0)=\ln 2$

22

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(e^2-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln\left(e^2-0\right)=\ln\left(e^2\right)=2$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n+1}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}}\right)=e^{\frac{0+0}{1}}=e^0=1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n+1}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\dfrac{4+0}{1+0}}=\sqrt{4}=2$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{6}\pi-0{,}8^n\right)=\sin\left(\dfrac{1}{6}\pi-0\right)=\dfrac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{3n+4}{n+1}.\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}.\pi\right)=\cos\left(\dfrac{3+0}{1+0}.\pi\right)=\cos(3\pi)=-1$

f. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\cos\left(\frac{1}{n}\pi\right)}\right)=e^{\cos(0.\pi)}=e^{\cos(0)}=e^1=e$

23

a. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+4}{9n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{4}{n^2}}{9+\frac{1}{n^2}}}=\sqrt{\frac{1+0}{9+0}}=\frac{1}{3}$

b. $\lim_{n\to\infty}\frac{100.2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(100.\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=100.0=0$

c. $\lim_{n\to\infty}\frac{25.1,44^{n-5}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{25.1,44^{-5}.1,44^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(25.1,44^{-5}.\left(\frac{1,44}{2}\right)^n\right)=25.1,44^{-5}.0=0$

24

Bij een directe formule kun je het beste de limiet zelf met rekenregels berekenen. Bij een recurrente betrekking kun je beter met een webgrafiek de limiet berekenen.

25.

a. $\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}}=\frac{a+0}{c+0}=\frac{a}{c}$

b. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}=\frac{a}{d}$

c. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^p}{bn^q}$ als $p > q$ dan: $\lim_{n\to\infty}\frac{an^p}{bn^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}.n^{\frac{p}{q}}=\pm\infty$

Als $p = q$ dan: $\lim_{n\to\infty}\frac{an^p}{bn^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{a.n^p}{b.n^p}=\frac{a}{b}$

Als $p < q$ dan :

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^p}{bn^q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}.n^{p-q}\right)=\frac{a}{b}.0=0$

26. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

a. $u_5 = \dfrac{5^2}{2^5} = \dfrac{25}{32} = 0,78125$ $\qquad u_{10} = \dfrac{10^2}{2^{10}} \approx 0,09766$

$u_{20} = \dfrac{20^2}{2^{20}} = 3,8.10^{-4} = 0,00038$ $\qquad u_{30} = \dfrac{30^2}{2^{30}} \approx 8,38.10^{-7} = 0,000$

We vermoeden : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right) = 0$

b. $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.\dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

c. $v_1 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^2 = 2$ $\qquad v_2 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{8}$

$v_3 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{16}{9} = \dfrac{16}{18} = \dfrac{8}{9}$ $\qquad v_4 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{25}{16} = \dfrac{25}{32}$

d. Als *n* groter wordt dan wordt de noemer van $\dfrac{1}{n}$ steeds groter , dus wordt $\dfrac{1}{n}$ steeds kleiner. Dan wordt ook 1+ $\dfrac{1}{n}$ steeds kleiner . Het kwadraat dus ook. $\Rightarrow$ v_n wordt daarom ook steeds kleiner. $\Rightarrow$ v_n is dus een monotoon dalende rij.

27. Gegeven de rij: $u_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ en de rij $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ met *n* = 1 , 2 , 3 , …

a. $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{2^n}} = \dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}.\dfrac{2^n}{n^3} = \dfrac{(n+1)^3}{n^3}.\dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^3 = \dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3$

b. Als n toeneemt dan wordt $\dfrac{1}{n}$ steeds kleiner dus wordt ook 1 + $\dfrac{1}{n}$ steeds kleiner en dus wordt ook $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3$ steeds kleiner en daarom ook $\dfrac{1}{2}.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3$ $\Rightarrow$ v_n is een monotoon dalende rij.

c. $\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 < 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 < 2 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ ≈ 3,85 (Dit mag want er geldt: $n > 0$) $\Rightarrow$ Vanaf $n = 4$ geldt het gevraagde.

d. $v_4 = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{125}{128} \Rightarrow \frac{u_5}{u_4} = \frac{125}{128} \Rightarrow u_5 = \frac{125}{128}.u_4$ Verder geldt $u_6 = \frac{125}{128}.u_5$ en

$u_7 = \frac{125}{128}.u_6 \Rightarrow u_6 = \frac{125}{128}.u_5 = \left(\frac{125}{128}\right)^2.u_4$ en $u_7 = \frac{125}{128}.u_6 = \left(\frac{125}{128}\right)^3.u_4 \Rightarrow$

$u_n = \left(\frac{125}{128}\right)^{n-4}.u_4 = u_n = \left(\frac{125}{128}\right)^{n-4}.\frac{64}{16}$ Aangezien er geldt : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{125}{128}\right)^{n-4} = 0$ volgt hier dus uit dat ook geldt:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n} = 0$

28. Gegeven de rij: $u_n = \frac{n^5}{1,8^n}$ en de rij $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ met $n =$ 1 , 2 , 3 , …

a. $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{1,8^{n+1}}}{\frac{n^5}{1,8^n}} = \frac{(n+1)^5}{1,8^{n+1}}.\frac{1,8^n}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5}.\frac{1,8^n}{1,8^{n+1}} = \frac{1}{1,8}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{5}{9}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \Rightarrow$

Als n toeneemt dan wordt $\frac{1}{n}$ steeds kleiner dus wordt ook 1 + $\frac{1}{n}$ steeds kleiner en dus wordt ook $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5$ steeds kleiner en daarom ook $\frac{5}{9}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^5$ $\Rightarrow v_n$ is een monotoon dalende rij.

b. $\frac{5}{9}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 < 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 < \frac{9}{5} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt[5]{\frac{9}{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < -1+\sqrt[5]{\frac{9}{5}} \Rightarrow n > \frac{1}{-1+\sqrt[5]{\frac{9}{5}}} \Rightarrow$

$n > 8{,}02 \Rightarrow$ vanaf $n = 9$ geldt dat $v_n < 1$

c. Er geldt: $v_9 = \frac{5}{9}.\left(1+\frac{1}{9}\right)^5 \approx 0{,}94 \Rightarrow \frac{u_{10}}{u_9} = 0{,}94 \Rightarrow u_{10} = 0{,}94.u_9$ Zo geldt ook $u_{11} = 0{,}94 \,.\, u_{10}$

$\Rightarrow u_{11} = 0{,}94^2 \,.\, u_9$ En verder: $u_{12} = 0{,}94^3 \,.\, u_9 \Rightarrow u_n = 0{,}94^{n-9}.u_9$ Aangezien er geldt :

$\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}94^{n-9} = 0$ volgt hier dus uit dat $\lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}94^{n-9}.u_9\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}94^{n-9}.\frac{9^5}{1,8^9}\right) = 0.\frac{9^5}{1,8^9} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{1,8^n} = 0$

29.

Voor $a > 0$ geldt dat : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = a^0 = 1$

30.

a. $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{e^p}$ We weten dat er altijd geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ voor $a > 1$ Vergelijk nu deze twee limieten en neem $k = 1$; a = e en $n = p$ dan geldt volgens de standaardlimiet dat ook geldt : $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{e^p} = 0$

b. Nu nemen we : $p = \ln(n) \Rightarrow n = \mathrm{e}^{p} \Rightarrow$ als $p \to \infty$ dan $\mathrm{e}^{p} \to \infty \Rightarrow n \to \infty$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln\left(e^p\right)}{e^p} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p.\ln(e)}{e^p} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{e^p} = 0$

d. Opgave heb ik veranderd . Bewijs m.b.v. onderdeel c dat geldt : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}} = 0$

Uit onderdeel c volgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ Stel nu $n = p^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ als n gaat naar oneindig dan gaat natuurlijk ook p naar oneindig $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln\left(p^{\frac{1}{3}}\right)}{p^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}.\ln p}{p^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{3}.\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln p}{p^{\frac{1}{3}}} = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}} = 0$

e. We weten uit onderdeel c dat geldt : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ Stel $n = p^{k}$ met $k > 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln(p^k)}{p^k} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{k.\ln(p)}{p^k} = k.\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln(p)}{p^k} = 0$ want $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\ln(p)}{p^k} = 0$

31.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}.\ln(n)} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

32.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{1,5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1,5}}{1,5^n} = 0$ standaardlimiet !! $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ met $a > 1$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = 1$ want er geldt de standaardlimiet : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ voor $a > 0$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10.\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 10.\frac{\ln(n)}{n^{0,5}} = 10 \,.\, 0 = 0$ want standaardlimiet : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^k} = 0$ voor $k > 0$

33.

a. $\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 1,0001^{10000} \approx 2,718$ en $e^1 \approx 2,718$

b. $\left(1+\frac{2}{10000}\right)^{10000} = 1,0002^{10000} \approx 7,388$ en $e^2 \approx 7,389$

c. $\left(1+\frac{-1}{10000}\right)^{10000} = 0,9999^{10000} \approx 0,368$ en $e^{-1} \approx 0,368$

d. Vermoedelijk geldt : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

34.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = e^4$

c. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{5}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^5}$

d. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

35.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ Vervang n door p^2 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{p^2} = e$ want als $n \to \infty$ dan gaat ook p^2 naar oneindig.

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2} = e^4$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{4\,\cdot\,0} = e^0 = 1$

36.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$

b. Dat mag niet . Neem bijv. de limieten $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ en $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ en er geldt niet dat $\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

Het betekent alleen dat voor grote waarden van n de formules naar een zelfde waarde gaan.

37. $u_n = \sqrt{1-u_{n-1}}$ met $u_0 = 0{,}1$

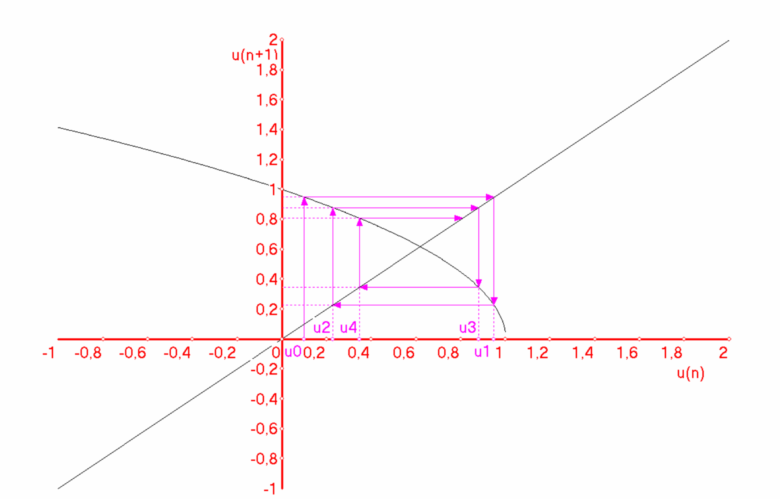
a. zie de figuur

b. $v_n = \sqrt{v_{n-1}+7}$ met $v_0 = 2$

$\Rightarrow$

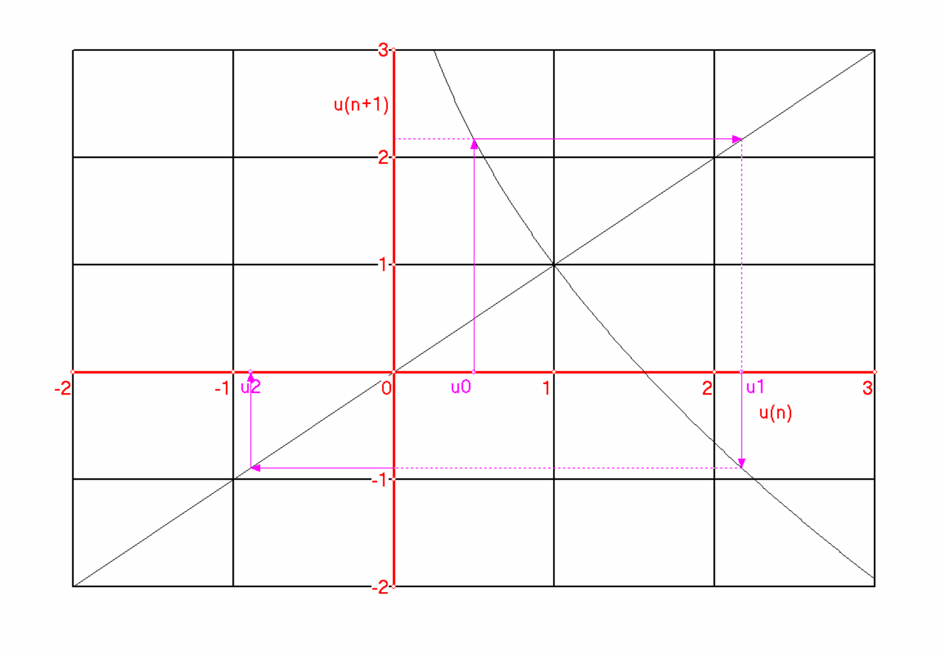
$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_n = g(v_{n-1}) \end{cases} \quad \text{met } g(x) = \sqrt{x+7}$$

c. $w_n = 0{,}1.(w_{n-1})^2 + 5$ met $w_0 = 1$

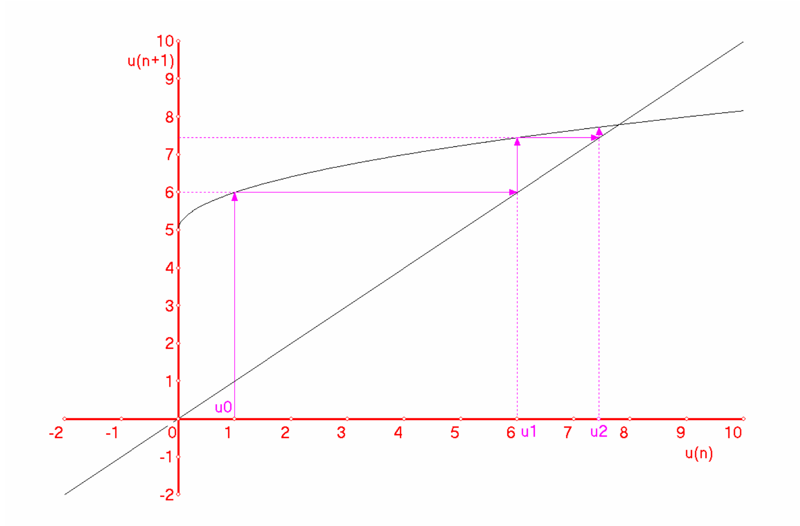


38a. Als u_0 > d genomen wordt dan blijft er sprake van convergentie. Als in de rechter figuur u_0 < d genomen wordt dan zal er nog steeds sprake zijn van divergentie. De bewering van A is dus niet waar.

38b. In de figuur hier rechts zie je bij de dalende functie f dat er sprake is van divergentie.

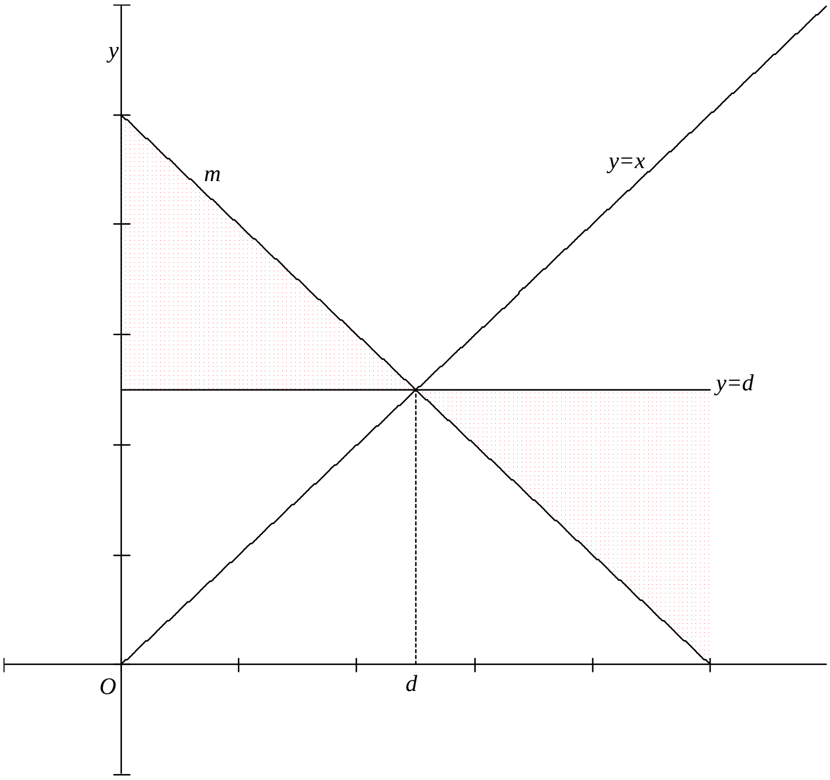


Nu zie je in de figuur rechts dat er sprake is van een stijgende functie , terwijl er convergentie is.



c. De bewering van C is waar. (zie de voorbeelden bij lijnen en kijk naar de theorie op blz. 124)

39.



In het gekleurde gebied heeft de r.c. *f'(d)* een waarde tussen -1 en 0.

40.

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases} \quad \text{met } f(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}3x + 1$$

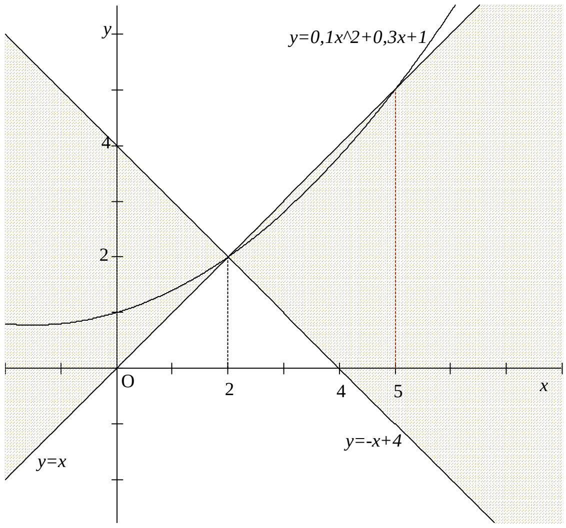
a. Eerst op zoek naar de dekpunten $\Rightarrow$

$0{,}1x^2 + 0{,}3x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 10 = 10x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$. Dit zijn dus de dekpunten.

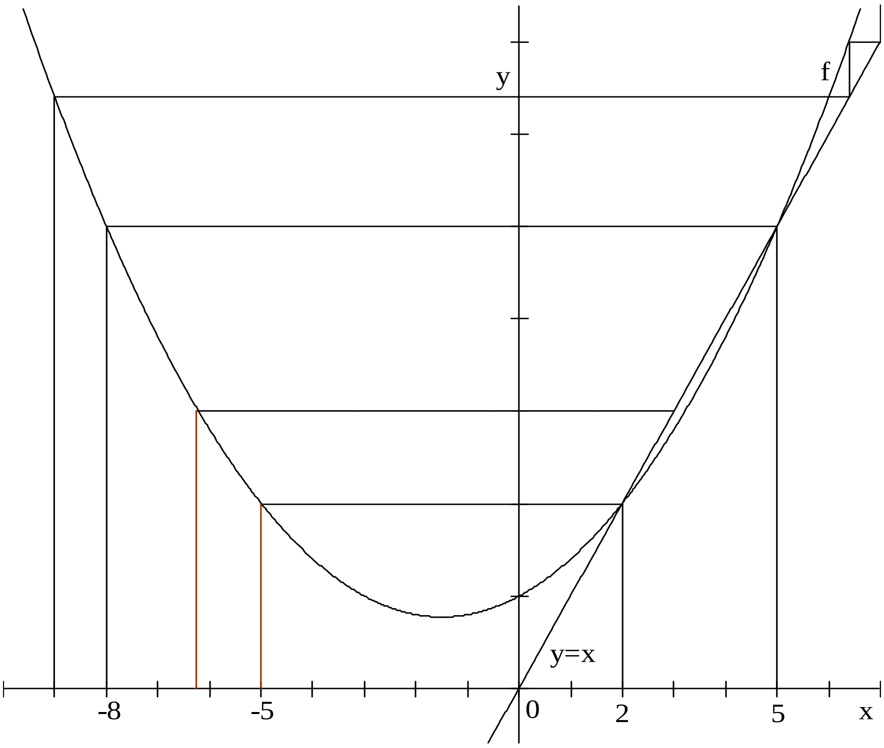
Zie de bijbehorende figuur:



Het dekpunt 5 ligt 3 eenheden rechts van het dekpunt 2. Drie eenheden links van het dekpunt 2 ligt x = -1 Het gebied tussen -1 en 5 ligt volgens de contractiestelling helemaal in het gebied met convergentie . $\Rightarrow$ convergentie voor $-1 < c < 5$

b. Voor het convergentiegebied hebben we nog nodig het resultaat van de vergelijking:

$$0{,}1x^2 + 0{,}3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -8$$



$u_0 < -8$ geeft een divergente rij.

$u_0 = -8$ geeft de convergente rij : -8 , 5 , 5, 5 , ….

$-8 < u_0 < -5$ $\Rightarrow u_1$ ligt dan tussen 2 en 5 dit geeft een convergente rij naar de waarde 2 en dalend.

$u_0 = -5$ geeft de rij -5 , 2 , 2 , 2 , …. die convergent is.

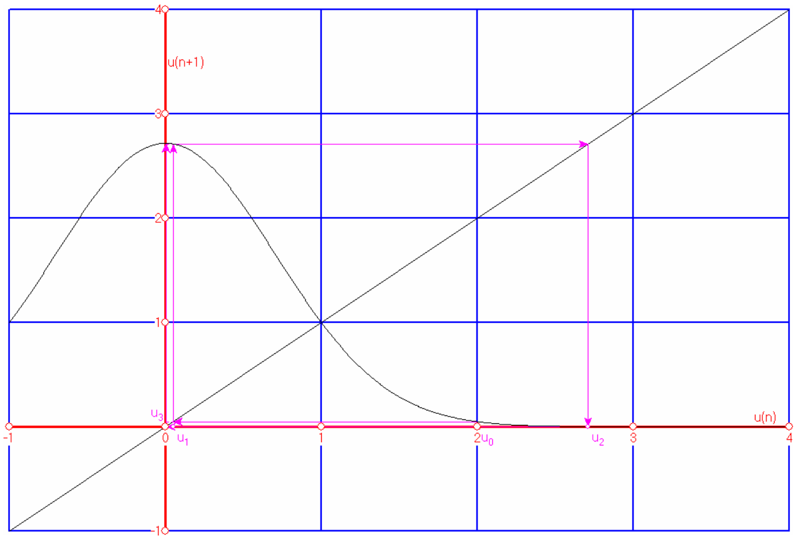
$-5 < u_0 \leq -1$ geeft een convergente en stijgende rij naar de waarde 2 .
$-1 < u_0 < 5$ geeft een convergente rij (zie a) met limiet 2.
$u_0 = 5$ geeft de convergente rij 5 , 5 , 5 , 5, 5 ,…..
$u_0 > 5$ geeft een divergente rij.
We krijgen dus: de rij convergeert voor $-8 \leq c \leq 5$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ voor $-8 < c < 5$

41. Gegeven: $\begin{cases} u_0 = c \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$ $met\ f(x) = e^{1-ax^2}$

a. $a = 1$

Het dekpunt van $y = x$ en $y = e^{1-x^2}$ is (1,1)



$f'(x) = -2x.e^{1-x^2} \Rightarrow f'(1) = -2 < -1 \Rightarrow$ volgens de contractiestelling is er dus geen interval aan te geven waarin de rij convergeert. (zie ook de getekende figuur !!)

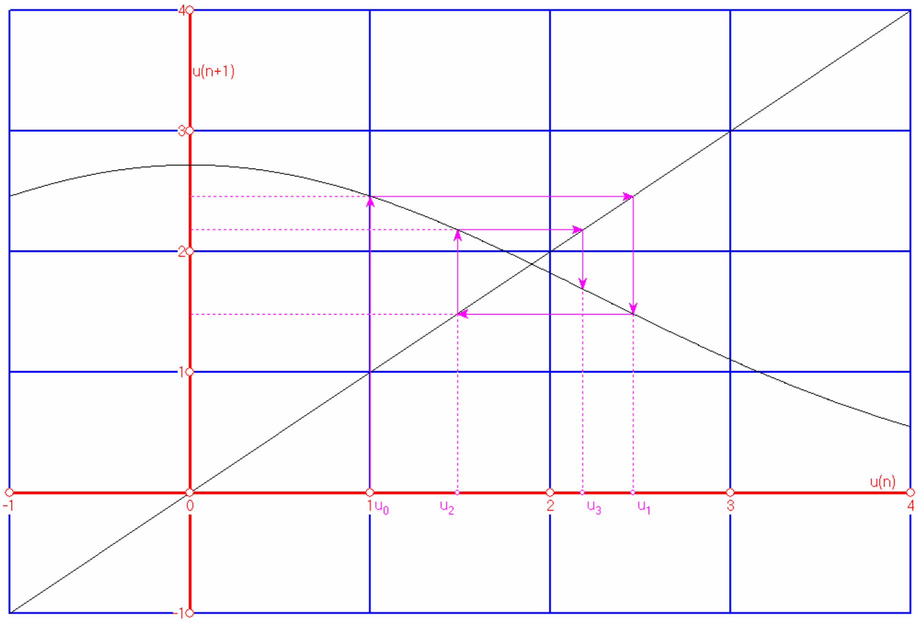
Als c = 1 dan hebben we te maken met de constante rij : 1 , 1 , 1 , 1 , 1… $\Rightarrow$ convergent.

Als c = -1 dan krijgen we te maken met de rij -1 , 1 , 1 , 1, 1 ,…..$\Rightarrow$ buiten de eerste term een constante rij en dus ook convergent.

b. Als a = 0,1 dan $f(x) = e^{1-0,1x^2}$ en $f'(x) = -0,2x.e^{1-0,1x^2}$ Nu blijkt uit de GR dat voor alle x de functie $f'(x)$ duidelijk tussen -1 en +1 ligt. $\Rightarrow$ er treedt voor alle waarden van c convergentie op . Zie de bijgetekende figuur.

De limietwaarde krijg je door het snijpunt te berekenen van $y = x$ en $y = e^{1-0,1x^2}$

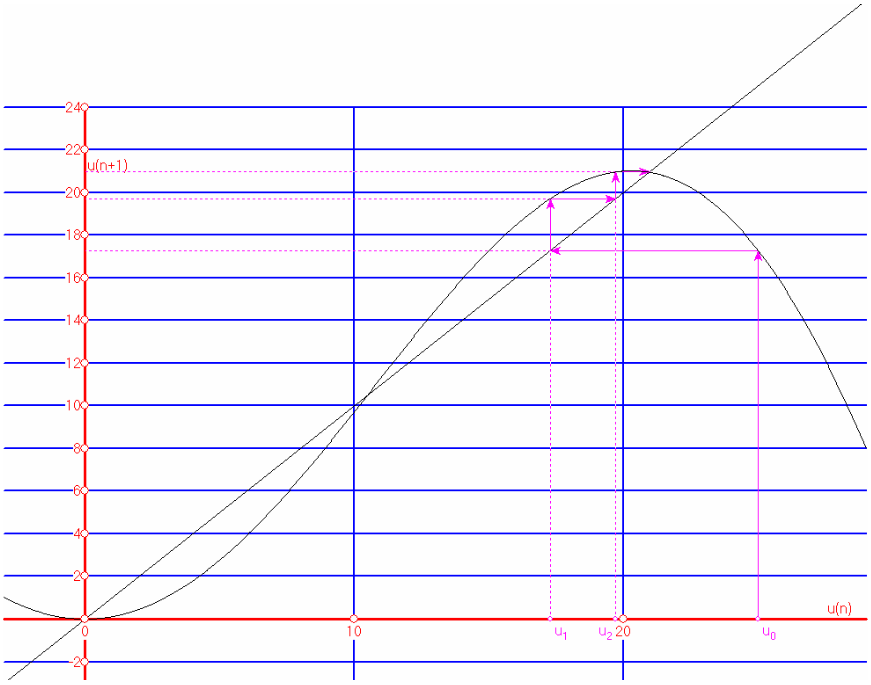
Met intersect vinden we : $x \approx 1{,}8969 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \approx 1{,}869$



42. Gegeven: $\begin{cases} u_0 = c \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$ $met\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}.x\sin(0{,}1x)$ met $D_f = \,<0{,}10\pi>$

a. $c = 25$

Zo te zien is er sprake van convergentie. De limietwaarde krijg je uit het snijpunt van de twee grafieken.



$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}x\sin(0{,}1x) \;\Leftrightarrow$

$x = 0$ of $1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(0{,}1x)$

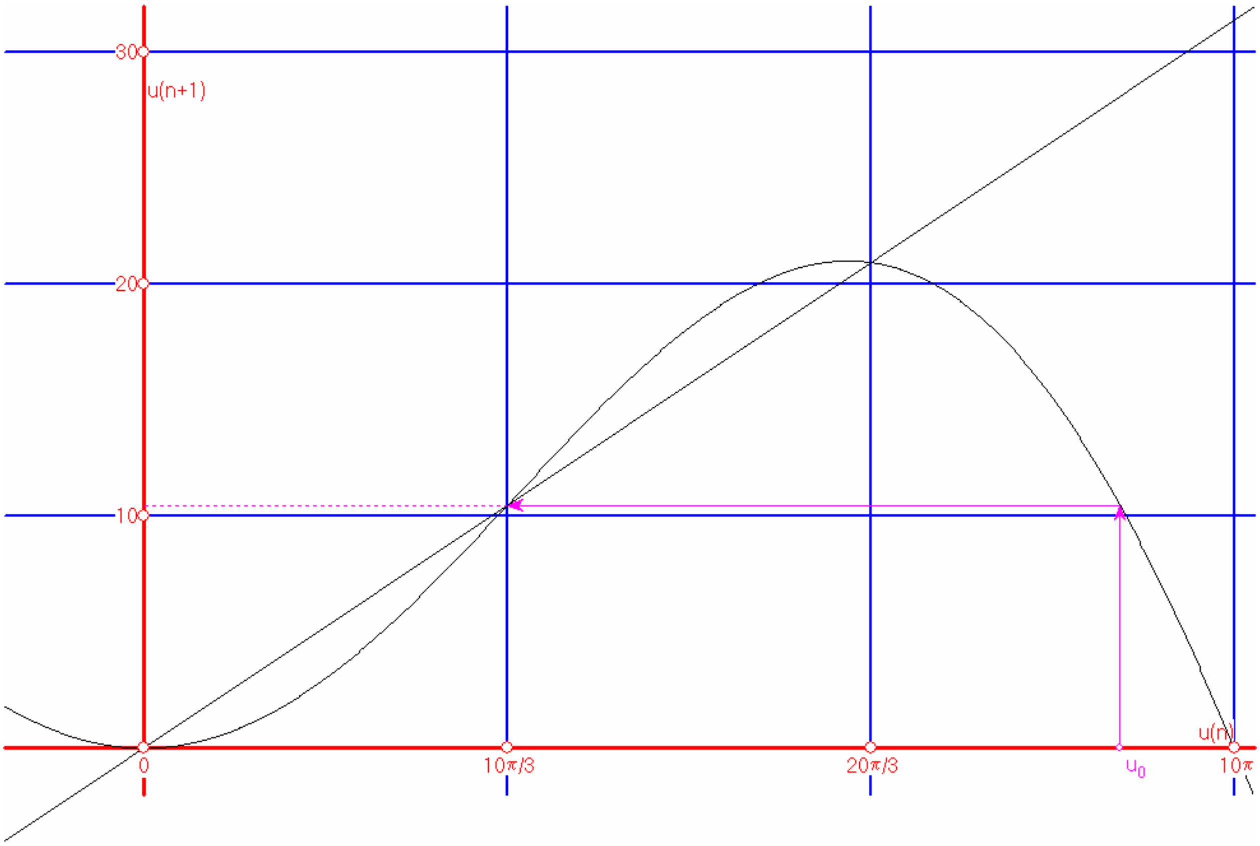
$\Rightarrow \sin(0{,}1x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$

$0{,}1x = \tfrac{1}{3}\pi + k.2\pi \vee 0{,}1x = \tfrac{2}{3}\pi + k.2\pi \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{10}{3}\pi + k.20\pi \vee x = \tfrac{20}{3}\pi + k.20\pi$

Aangezien gegeven is dat het domein $<0\,,\,10\pi>$ geldt dus :

$x = \tfrac{10}{3}\pi \vee x = \tfrac{20}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{20}{3}\pi$



b. Nu het tweede snijpunt berekenen van $y_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x.\sin(0{,}1x)$ en $y_2 = \dfrac{10}{3}\pi$ Met de optie intersect vinden we : $x \approx 28{,}13$ en $10{,}47$ $\Rightarrow$ voor alle c met $10{,}47 < c < 28{,}13$ convergeert de rij u_n naar dezelfde waarde als bij $c = 25$.

43. $y = -x^2 + 3x + 4$ A(-2 , -6) en $-1 < x_0 < 4$

a. $x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3\ ,\ 4) \Rightarrow$ r.c. $P_0A = \dfrac{4-(-6)}{3-(-2)} = \dfrac{10}{5} = 2$ $\Rightarrow AP_0$: $y = 2x + b$ door $(3{,}4) \Rightarrow 4 = 6 + b$
$\Rightarrow b = -2 \Rightarrow AP_0$: $y = 2x - 2 \Rightarrow$ snijpunt met de x-as is $(1\ ,\ 0)$ $\Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow P_1\ (1\ ,\ 6)$
Nu r.c. $AP_1 = \dfrac{6-(-6)}{1-(-2)} = 4$ De lijn gaat ook door $(-2,-6) \Rightarrow$ verg. AP_1 : $y = 4x + 2$ $\Rightarrow$ het snijpunt met de x-*as* is $(-\frac{1}{2}, 0)$ $\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow P_2\ (-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$ $\Rightarrow$ r.c. AP_2 is:
$\dfrac{2\frac{1}{4}-(-6)}{-\frac{1}{2}-(-2)} = \dfrac{8\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}} = 5\frac{1}{2}$ $\Rightarrow AP_2 : y = 5{,}5x + b$ door $A(-2,-6)$ $\Rightarrow b = 5 \Rightarrow AP_2 : y = 5{,}5x + 5$
Nu nog AP_2 snijden met de x-*as* $\Rightarrow$ snijpunt $(-\frac{10}{11}, 0) \Rightarrow x_3 = -\frac{10}{11}$

b. Als $x = x_n$ $\Rightarrow P_n$ $(x_n, -x_n^{\ 2} + 3x_n + 4)$ $A\ (-2\ ,\ -6) \Rightarrow$ r.c AP_n is :

$$\frac{-x_n^{\ 2} + 3x_n + 4 - (-6)}{x_n - (-2)} = \frac{-x_n^{\ 2} + 3x_n + 10}{x_n + 2} = \frac{-(x_n^{\ 2} - 3x_n - 10)}{x_n + 2} = \frac{-(x_n - 5)(x_n + 2)}{x_n + 2} = -(x_n - 5) = 5 - x_n$$

c. $\Rightarrow AP_{n+1}: \ y=(5-x_n).x+b$ door A(-2,-6) $\Rightarrow$ -6 = $(5-x_n).(-2)+b \ \Rightarrow b$ = 4 - 2x_n $\Rightarrow$
$y=(5-x_n).x+4-2x_n$ Nu de lijn snijden met de x-as $\Rightarrow$ $0=(5-x_n).x+4-2x_n \ \Leftrightarrow$
$(5-x_n).x=2x_n-4 \ \Rightarrow \ x=\dfrac{2x_n-4}{5-x_n}$ $\Rightarrow$ de recurrente formule van de rij wordt:

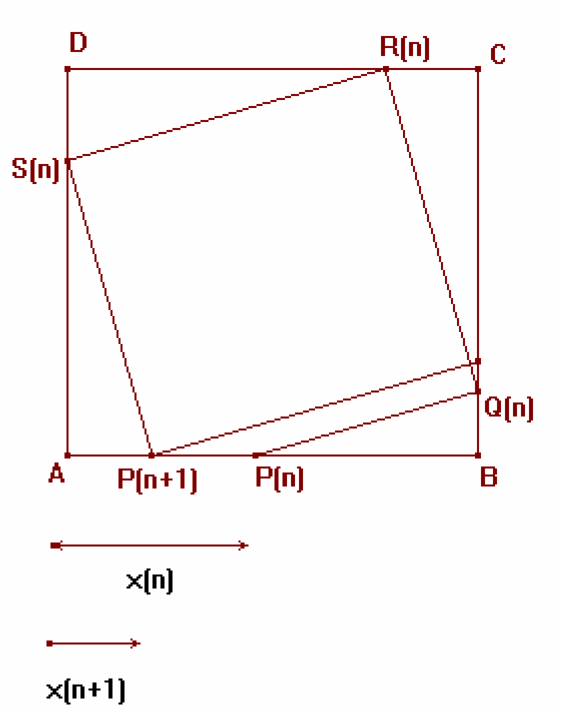
$$x_{n+1}=\frac{2x_n-4}{5-x_n}$$

d. We moeten eerst de dekpunten berekenen . Stel $x_{n+1} = x_n = d \Rightarrow$

$$d=\frac{2d-4}{5-d} \Rightarrow 5d-d^2=2d-4 \Leftrightarrow d^2-3d-4=0 \Leftrightarrow (d-4)(d+1)=0 \Leftrightarrow d=4 \vee d=-1$$

Het is duidelijk te zien in de figuur dat het juiste dekpunt -1 is $\Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$

44.



a. $AP_n = x_n \Rightarrow BP_n = 6 - x_n \ \Rightarrow$

$BQ_n=\frac{1}{3}(6-x_n)=2-\frac{1}{3}x_n \ \Rightarrow$

$CQ_n=6-(2-\frac{1}{3}x_n)=4+\frac{1}{3}x_n \ \Rightarrow$

$CR_n=\frac{1}{3}(4+\frac{1}{3}x_n)=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}x_n \ \Rightarrow$

$DR_n=6-(\frac{4}{3}+\frac{1}{9}x_n)=\frac{14}{3}-\frac{1}{9}x_n \ \Rightarrow$

$DS_n=\frac{1}{3}(\frac{14}{3}-\frac{1}{9}x_n)=\frac{14}{9}-\frac{1}{27}x_n \ \Rightarrow$

$AS_n=6-(\frac{14}{9}-\frac{1}{27}x_n)=\frac{40}{9}+\frac{1}{27}x_n \ \Rightarrow$

$AP_{n+1}=\frac{1}{3}(\frac{40}{9}+\frac{1}{27}x_n)=\frac{40}{27}+\frac{1}{81}x_n \ \Rightarrow$

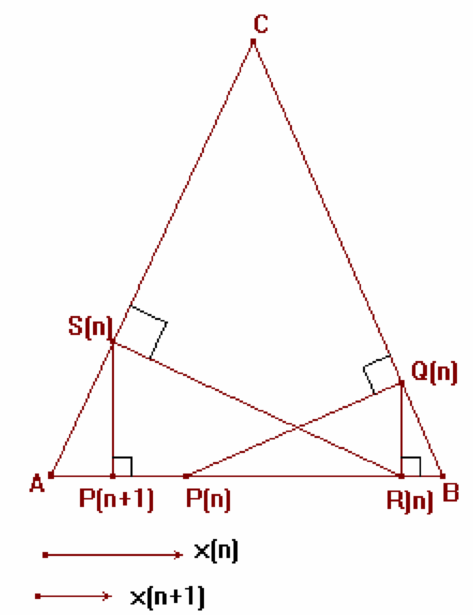
$x_{n+1}=\frac{40}{27}+\frac{1}{81}x_n$

b. Aangezien $\frac{1}{81}$ ligt tussen – en +1 geldt
er dus dat de rij convergeert.
De grenswaarde $\boldsymbol{g}$ berekenen we met de
vergelijking : $g=\frac{40}{27}+\frac{1}{81}g \ \Rightarrow$

$\frac{80}{81}g=\frac{40}{27} \ \Leftrightarrow \ g=\frac{40}{27}\cdot\frac{81}{80}=\frac{3}{2}=1,5$

$\Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1,5$

45.



a. $AP_n = x_n \Rightarrow BP_n = 8 - x_n \ \Rightarrow$

$\cos\angle A=\cos\angle B=\dfrac{0,5AB}{AC}=\dfrac{4}{10} \ \Rightarrow$

$\cos\angle B=\dfrac{BQ_n}{BP_n} \ \Rightarrow \ BQ_n=BP_n.\cos\angle B=$

$(8-x_n).0,4=3,2-0,4x_n$ Verder geldt:

$\cos\angle B=\dfrac{BR_n}{BQ_n} \Rightarrow BR_n=BQ_n.\cos\angle B \ =$

$0,4(3,2-0,4x_n)=1,28-0,16x_n \ \Rightarrow$

$$AR_n = 8 - BR_n = 8-(1,28-0,16x_n) = 6,72+0,16x_n$$

$$\cos\angle A = \frac{AS_n}{AR_n} \Rightarrow AS_n = AR_n.\cos\angle A = (6,72+0,16x_n).0,4 = 2,688+0,064x_n$$

$$\cos\angle A = \frac{AP_{n+1}}{AS_n} \Rightarrow AP_{n+1} = AS_n.\cos\angle A = (2,688+0,064x_n).0,4 = 1,0752+0,0256x_n$$

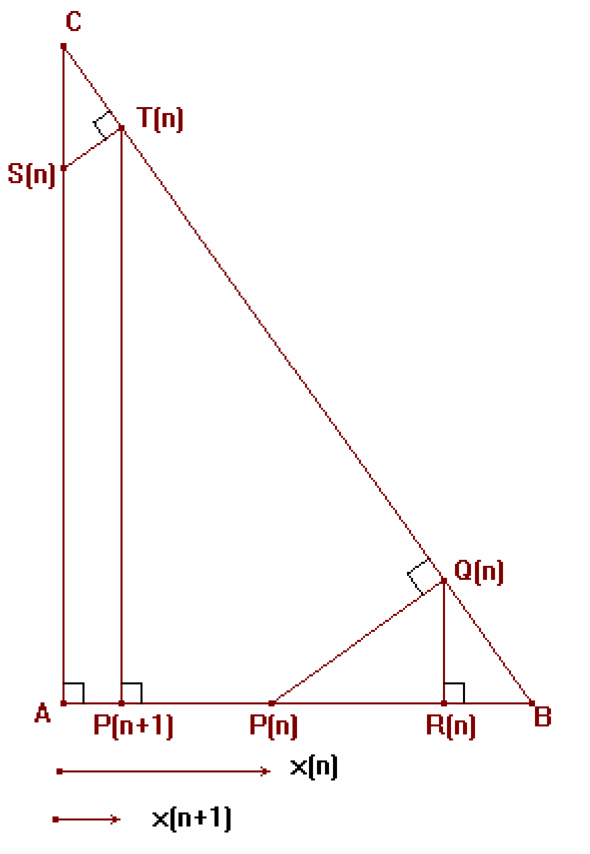
$$\Rightarrow x_{n+1} = 1,0752+0,0256x_n$$

b. De rij heeft een lineaire vorm waarbij a = 0,0256 dus tussen -1 en 1 $\Rightarrow$ convergentie $\Rightarrow$ De grenswaarde g volgt uit de vergelijking : $g = 1,0752+0,0256g \;\Rightarrow$

$$0,9744g = 1,0752 \;\Leftrightarrow\; g = \frac{1,0752}{0,9744} = \frac{32}{29} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{32}{29}$$

46.

a. $AP_n = x_n \Rightarrow BP_n = 6 - x_n$ Er geldt:



$$\cos\angle B = \frac{AB}{BC} = \tfrac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \cos\angle B = \frac{BQ_n}{BP_n} \Rightarrow$$

$$BQ_n = \cos\angle B.BP_n = 0,6.(6-x_n) = 3,6-0,6x_n \Rightarrow$$

$$\cos\angle B = \frac{BR_n}{BQ_n} \Rightarrow BR_n = BQ_n.\cos\angle B =$$

$$0,6(3,6-0,6x_n) = 2,16-0,36x_n$$

$$AR_n = 6 - BR_n = 6-(2,16-0,36x_n) = 3,84+0,36x_n$$

In $\Delta\ AR_nS_n$ geldt:

$$\tan\angle AR_nS_n = \tan\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\tan\angle AR_nS_n = \frac{AS_n}{AR_n} \Rightarrow AS_n = AR_n.\tan\angle AR_nS_n =$$

$\tfrac{4}{3}.(3,84+0,36x_n) = 5,12+0,48x_n$ Verder geldt:

$$CS_n = 8 - AS_n = 8-(5,12+0,48x_n) = 2,88-0,48x_n$$

$$\cos\angle C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = 0,8 \Rightarrow$$

$$\cos\angle C = \frac{CT_n}{CS_n} \Rightarrow CT_n = CS_n.\cos\angle C = 0,8.(2,88-0,48x_n) = 2,304-0,384x_n$$

$BT_n = 10 - CT_n = 10-(2,304-0,384x_n) = 7,696+0,384x_n$ Verder geldt :

$$\cos\angle B = \frac{BP_{n+1}}{BT_n} \Rightarrow BP_{n+1} = \cos\angle B.BT_n = 0,6.(7,696+0,384x_n) = 4,6176+0,2304x_n$$

Verder geldt weer: $AP_{n+1} = 6 - BP_{n+1} = 6-(4,6176+0,2304x_n) = 1,3824-0,2304x_n$

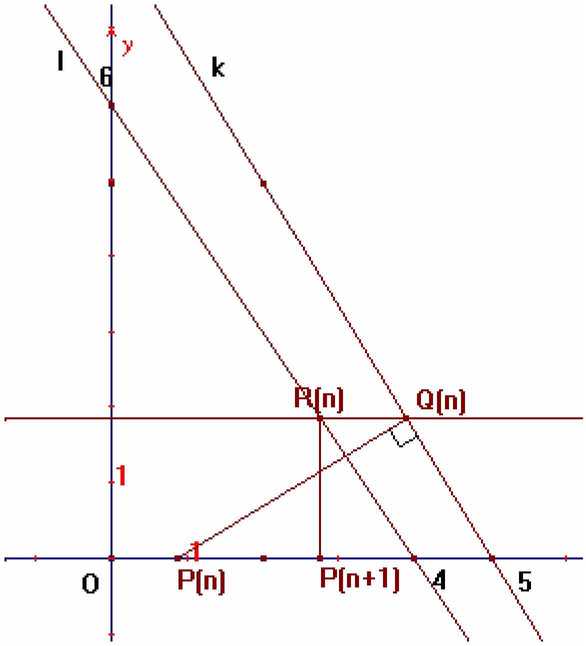
Totaal geldt dus: $x_{n+1} = 1,3824-0,2304x_n$

b. De rij is lineair en a = -0,2304 ligt tussen -1 en +1 $\Rightarrow$ De grenswaarde g vinden we uit de vergelijking $g = 1,3824-0,2304g \Leftrightarrow 1,2304g = 1,3824 \Leftrightarrow g = \dfrac{1,3824}{1,2304} = \dfrac{864}{769}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{864}{769}$$

47

$k: y = 10 - 2x$ en $l: y = 6 - 1{,}5x$

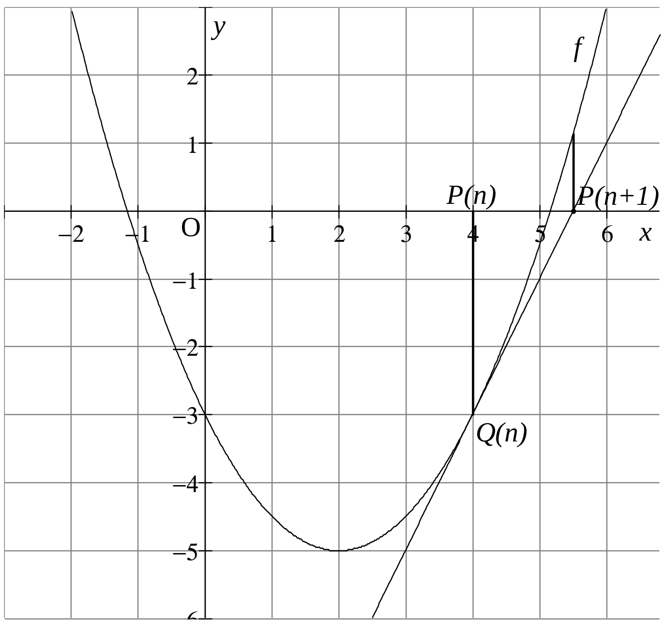


a. $P_0(1,0)$ Er geldt :
(r.c. P_0Q_0). (r.c. k) = -2 $\Rightarrow$ r.c. P_0Q_0 = 0,5 $\Rightarrow$
verg. P_0Q_0 : y = 0,5x + b door (1,0) $\Rightarrow$
0 = 0,5 + b $\Rightarrow$ b = -0,5 $\Rightarrow$ de vergelijking van
P_0Q_0 is : y = 0,5x - 0,5
Nu deze lijn snijden met $k \Rightarrow$
$10 - 2x = 0{,}5x - 0{,}5 \Leftrightarrow -2{,}5x = -10{,}5 \Leftrightarrow$
$x = 4{,}2 \Rightarrow y = 10 - 8{,}4 = 1{,}6 \Rightarrow Q_0(4{,}2;1{,}6)$
Nu de vergelijking y = 1,6 snijden met $l \Rightarrow$
1,6 = 6 – 1,5x $\Leftrightarrow$ 1,5x = 4,4 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{44}{15}$ $\Rightarrow$
Punt $P_1\left(\frac{44}{15}, 0\right)$

b. Nu : $AP_n = x_n$ en $AP = x_{n+1}$ Nu in principe
dezelfde methode toepassen $\Rightarrow$ vergelijking loodrecht op k is : y = 0,5x + b door (x_n,0) $\Rightarrow$
0 = 0,5x_n + b $\Rightarrow$ b = -0,5x_n $\Rightarrow$ vergelijking door P_n is : y = 0,5x – 0,5x_n
Nu deze lijn snijden met $k \Rightarrow$ $0{,}5x - 0{,}5x_n = 10 - 2x \Leftrightarrow 2{,}5x = 10 + 0{,}5x_n \Leftrightarrow x = 4 + 0{,}2x_n \Rightarrow$
$y = 10 - 2.(4 + 0{,}2x_n) = 2 - 0{,}4x_n \Rightarrow Q_n\ (4 + 0{,}2x_n ; 2 - 0{,}4x_n)$ Nu de horizontale lijn door Q_n
snijden met $l \Rightarrow$ 6 - 1,5x = 2 – 0,4x_n $\Leftrightarrow$ -1,5x = -4 – 0,4x_n $\Leftrightarrow$ $x = \frac{8}{3} + \frac{4}{15}x_n \Rightarrow P_{n+1}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{15}x_n, 0\right)$
$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{4}{15}x_n + 2\frac{2}{3}$

c. De rij heeft een lineaire vorm en er geldt -1 < $\frac{4}{15}$ < 1 $\Rightarrow$ de rij convergeert.
Nu de grenswaarde g berekenen uit : $\frac{4}{15}g + 2\frac{2}{3} = g \Leftrightarrow -\frac{11}{15}g = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow g = \frac{8}{3}.\frac{15}{11} = \frac{40}{11} = 3\frac{7}{11} \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} x_n = 3\frac{7}{11}$

48. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 3$



a. $P_0(4,0)$ $\Rightarrow$ Q_0 (4,f(4)) = (4,-3)
f ‘(-3) = 2 $\Rightarrow$ vergelijking van de
raaklijn is : y = 2x + b door (4 , -3) $\Rightarrow$
-3 = 2 . 4 + b $\Leftrightarrow$ b = -11 $\Rightarrow$ de verg.
van de raaklijn is : y = 2x - 11
Nu de raaklijn snijden met de x-as $\Rightarrow$
2x = 11 $\Rightarrow$ x = 5,5 $\Rightarrow$ P_1 (5,5 ; 0)

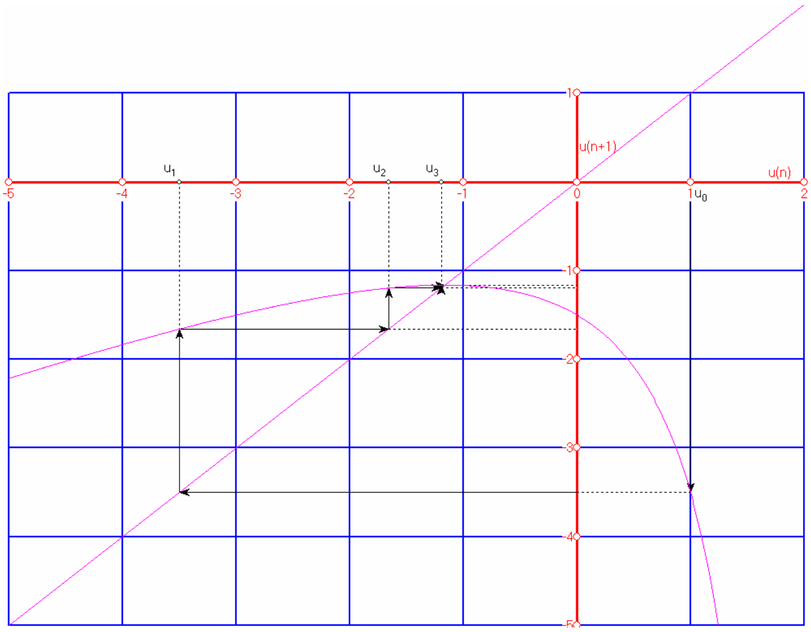
b. Nu : $x_{P_n} = x_n$ en $x_{P_{n+1}} = x_{n+1}$
Nu doen we in principe weer
hetzelfde: $\Rightarrow$

$P_n(x_n, 0) \Rightarrow Q_n(x_n, 0{,}5x_n^{\,2} - 2x_n - 3)$ Er geldt $f'(x) = x - 2 \Rightarrow f'(x_n) = x_n - 2 \Rightarrow$
vergelijking raaklijn is nu : $y = (x_n - 2).x + b$ door $Q_n \Rightarrow 0{,}5x_n^{\,2} - 2x_n - 3 = (x_n - 2)x_n + b \Rightarrow$
$0{,}5x_n^{\,2} - 2x_n - 3 = x_n^{\,2} - 2x_n + b \Leftrightarrow b = -0{,}5x_n^{\,2} - 3 \Rightarrow$ raaklijn is : $y = (x_n - 2)x + (-0{,}5x_n^{\,2} - 3)$
Nu de raaklijn snijden met $y = 0 \Rightarrow 0 = (x_n - 2)x + (-0{,}5x_n^{\,2} - 3) \Leftrightarrow (x_n - 2)x = 0{,}5x_n^{\,2} + 3$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}5x_n^{\,2} + 3}{x_n - 2} \Rightarrow$ We krijgen dus : $x_{n+1} = \dfrac{0{,}5x_n^{\,2} + 3}{x_n - 2}$

c. $g(x) = \dfrac{0{,}5x^2 + 3}{x - 2}$

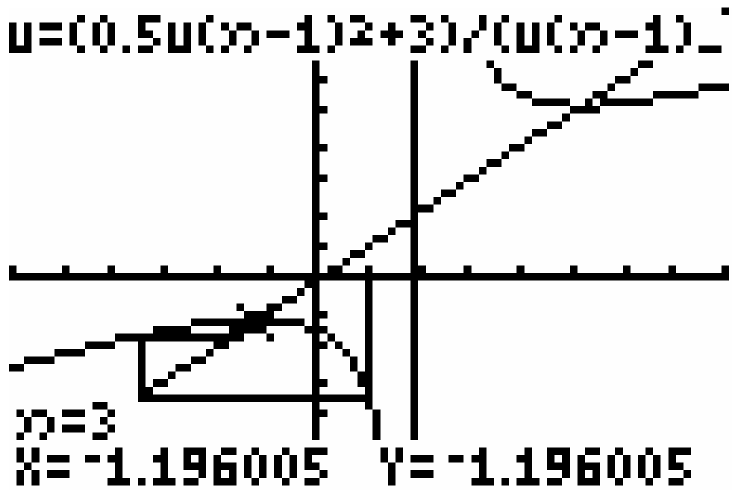
d. Voor de dekpunten geldt : $\dfrac{0{,}5d^2 + 3}{d - 2} = d \Leftrightarrow 0{,}5d^2 + 3 = d^2 - 2d \Leftrightarrow -0{,}5d^2 + 2d + 3 = 0 \Rightarrow$
D = 4 – 4.(-0,5).3 = 10 $\Rightarrow d = \dfrac{-2 - \sqrt{10}}{-1} \vee d = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{-1} \Leftrightarrow d = 2 + \sqrt{10} \vee d = 2 - \sqrt{10} \Rightarrow$
De dekpunten zijn dus : $2 + \sqrt{10}$ en $2 - \sqrt{10}$

e.

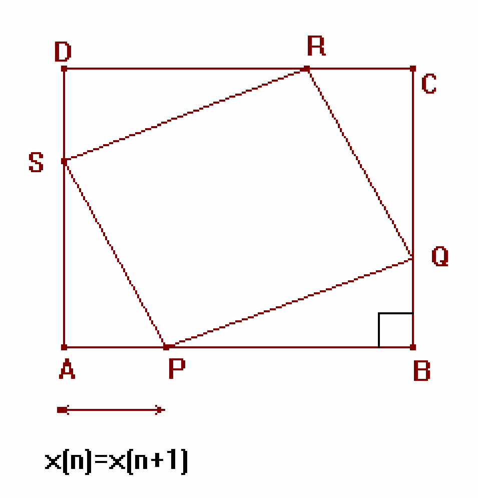


In de onderste figuur zie je de webgrafiek in een groter domein. In de figuur hiernaast zie je dezelfde figuur vergroot. Als we $u_0 < 2$ nemen dan convergeert de rij zoals je ziet naar het dekpunt $2 - \sqrt{10}$.

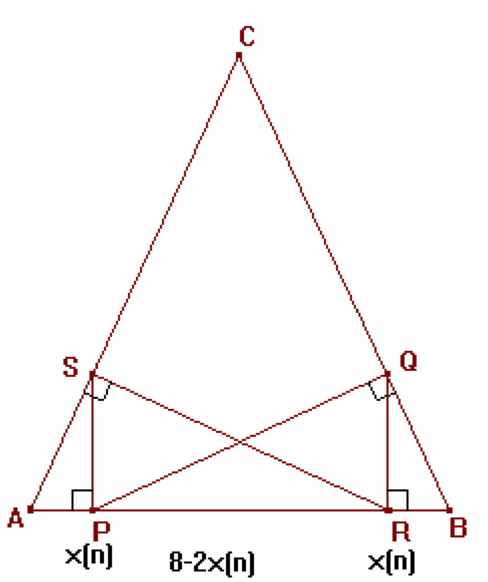
De betekenis van dit dekpunt in figuur 24.24 is dat dit dekpunt juist een snijpunt van de functie f is met de x-as. Nemen we c en dus $P_0 < 2$ dus links van de top dan nadert P_n het linkersnijpunt van de grafiek met de x-as.



49.
Bij opgave **44** geldt in de grenssituatie dat :
$AP = BQ = CR = DS \Rightarrow AP = x_n$ en $PB = 6 - x_n$,
verder geldt : $QB = \frac{1}{3}PB = \frac{1}{3}(6-x) = 2 - \frac{1}{3}x_n$
In deze limietsituatie geldt dus :
$x_n = 2 - \frac{1}{3}x_n \Leftrightarrow \frac{4}{3}x_n = 2 \Leftrightarrow x_n = 1\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1\frac{1}{2}$



Bij opgave **45**.



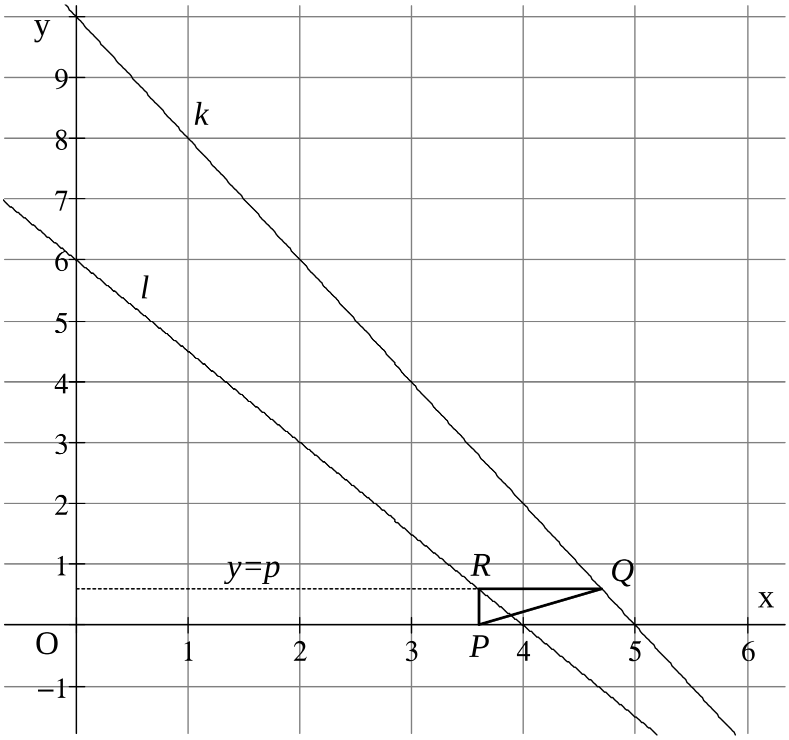
Net als bij opgave 44 bekijken we de grenssituatie.
Er geldt dan : $AP = RB \Rightarrow$
Als $AP = x_n$ dan geldt dus : $RB = x_n$ en $PR = 8 - 2x_n$
In Δ APS geldt:

$$\cos(\angle A) = 0,4 \Rightarrow \frac{x}{AS} = 0,4 \Leftrightarrow 0,4.AS = x \Leftrightarrow$$

$$AS = 2,5x$$

In Δ APS geldt : $AS^2 = AP^2 + PS^2 \Leftrightarrow$
$PS^2 = (2,5x)^2 - x^2 = 5,25x^2$
In Δ ARS geldt : $AR^2 = AS^2 + RS^2 \Leftrightarrow$
$RS^2 = (8-x)^2 - (2,5x)^2 =$
$64 - 16x + x^2 - 6,25x^2 = 64 - 16x - 5,25x^2$
In Δ PRS geldt: $RS^2 = PS^2 + PR^2 = 5,25x^2 + (8-2x)^2$
Uit deze vergelijkingen volgt nu : $(8-x)^2 - (2,5x)^2 = 5,25x^2 + (8-2x)^2 \Leftrightarrow$
$64 - 16x - 5,25x^2 = 5,25x^2 + 64 - 32x + 4x^2 \Leftrightarrow 14,5x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(14,5x - 16) = 0$
$x = 0$ vervalt $\vee$ $x = \frac{16}{14,5} = \frac{32}{29} \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{32}{29}$

Bij opgave 47 :
k: $y = 10 - 2x$ en l: $y = 6 - 1{,}5x$
Als hier nu de limietsituatie zou gelden dan moet P_n en P_{n+1} met elkaar gaan samenvallen. We krijgen dan de volgende situatie:



Stel $PR = p \Rightarrow$
$6 - 1{,}5x_P = p \Leftrightarrow 1{,}5x_P = 6 - p \Leftrightarrow$
$x_P = 4 - \frac{2}{3}p$
en ook geldt:
$10 - 2x_Q = p \Leftrightarrow 2x_Q = 10 - p \Leftrightarrow$
$x_Q = 5 - \frac{1}{2}p$ Voor de afstand RQ geldt dus:
$RQ = (5 - \frac{1}{2}p) - (4 - \frac{2}{3}p) = 1 + \frac{1}{6}p$
Aangezien de r.c. van PQ gelijk is aan $\frac{1}{2}$ geldt dus : $\dfrac{p}{1+\frac{1}{6}p} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2p = 1 + \frac{1}{6}p \Leftrightarrow 12p = 6 + p$

$\Leftrightarrow 11p = 6 \Leftrightarrow p = \frac{6}{11} \quad \Rightarrow x_P = 4 - \frac{2}{3}.\frac{6}{11} = \frac{40}{11} \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{40}{11}$